

重庆市高 2023 届高三第五次质量检测

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1-4 DCCD 5-8 ADBB

6. D 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)$ 为偶函数即 $y=f(x)$ 的图像关于 $x=3$ 对称,又因为 $f(x)+f(2-x)=2$ 即 $y=f(x)$ 的图像关于 $(1,1)$ 对称且 $f(1)=1$,

故 $f(5)=f(1)=1$, A 错误; $f(3), f(0)$ 的函数值未知,故 B, C 不成立;

因为双对称可知 $y=f(x)$ 的周期为 8,故 $f(-3)=f(5)=f(1)=1$, D 正确.

7. B 由 $|PQ|=|F_1F_2|$ 且 PF_1 与 QF_2 垂直可知,四边形 PQF_1F_2 为菱形,且边长为 $2c$,结合原点观察, $\triangle QF_1O$ 为直角三角形, $QF_1=2c, F_1O=c$,故 $\angle QF_1O=60^\circ$,则 $PF_1=2\sqrt{3}c, PF_2=2c, PF_1-PF_2=$

$2\sqrt{3}c-2c=2a$,即离心率 $e=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,选 B.

8. B 由 $f'(x_0)=2x_0+\ln x_0+1-a=0$ 且 $g'(x_0)=-2ae^{-2x_0}+2x_0=0$ 两方程联立消去 a 可得

$2x_0+\ln x_0+1=x_0e^{2x_0}=e^{2x_0+\ln x_0}$,设 $2x_0+\ln x_0=t$,即 $t+1=e^t$,由常用函数不等式可知

$e^t \geq t+1$ 恒成立当 $t=0$ 时取等,即 $2x_0+\ln x_0=0$ 且 $x_0e^{2x_0}=1$,则 $\ln x_0=-2x_0, e^{2x_0}=\frac{1}{x_0}$,所以

$e^{2x_0}\ln x_0=-2$,选 B.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.全部选对得 5 分,部分选对得 2 分,有选错得 0 分.

9-12 AC BD BCD ACD

11. BCD 选项 A: $PC=5$,半径 $r=4$,圆 C 上有且只有一个点到点 P 的距离为 1,故错误;

选项 B:当 PQ 为圆的切线时, $\tan \angle CPQ$ 取得最大为 $\frac{4}{3}$,故存在点 Q 使 $\tan \angle CPQ = \frac{4}{3}$,正确.

选项 C:由向量数量积的几何意义知 $\vec{PQ} \cdot \vec{PC}$ 等于 $|\vec{PC}|$ 与 \vec{PQ} 在 \vec{PC} 方向上投影的乘积, \vec{PQ} 在 \vec{PC} 方向上投影的范围为 $[1,9]$,则 $\vec{PQ} \cdot \vec{PC}$ 的取值范围为 $[5,45]$,正确;

选项 D:观察可知:当 M, N 接近重合时 $\frac{PM}{PN}$ 接近 1,当 M, N 经过圆心 $\frac{PM}{PN}=9$,所以 $\frac{PM}{PN} \in (1,9)$,

故 $\vec{PM}=3\vec{PN}$ 可以成立,正确.选 BCD

12. ACD 由 $4a^2-ab+b^2=1$ 得 $b^2-ab+4a^2-1=0$,关于 b 的方程有解,

所以 $\Delta=(-a)^2-4(4a^2-1) \geq 0 \therefore a^2 \leq \frac{4}{15} \therefore |a| \leq \frac{2\sqrt{15}}{15}$, A 正确;

取 $a=0, b=1$ 便知 $|a+b| < 1$ 不成立, B 错误;

由 $4a^2-ab+b^2=1$ 得 $4a^2+b^2=1+ab=1+\frac{1}{2} \cdot 2ab$,依据均值不等式得 $-\frac{4a^2+b^2}{2} \leq 2ab \leq \frac{4a^2+b^2}{2}$

所以令 $4a^2+b^2=t$,则有 $1-\frac{t}{4} \leq t \leq 1+\frac{t}{4} \therefore \frac{4}{5} \leq t \leq \frac{4}{3}$,故 $\frac{4}{5} \leq 4a^2+b^2 \leq \frac{4}{3}$, C 正确;

数学试题参考答案 第 1 页(共 4 页)

由 $4a^2 - ab + b^2 = 1$ 得 $(2a - b)^2 + 3ab = 1$. $\therefore (2a - b)^2 = 1 - 3ab = 1 + \frac{3}{2} \cdot 2a \cdot (-b)$,

令 $|2a - b| = u$, 同理依据均值不等式 $2a \cdot (-b) \leq \left(\frac{2a - b}{2}\right)^2$ 可得 $u^2 \leq 1 + \frac{3}{8}u^2$, 所以 $u^2 \leq \frac{8}{5}$,

故 D 正确; 选择 ACD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. π 14. $y = 2x - 2$ 15. 720 16. (1) 5 (2) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$

15. 由于奇数学号的同学不能安排在周一、周三、周五三天, 故先在偶数学号(2, 4, 6, 8 四位)的同学中选出三位安排在周一、周三、周五, 有 A_4^3 种, 剩下的一位连同学号为奇数的五位同学, 共 6 位同学中, 选出两位安排在周二、周四值日即可, 有 A_6^2 , 所以满足条件的不同安排方法种数为 $A_4^3 \cdot A_6^2 = 720$

16. 由椭圆的参数方程, 设 $A(2\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B(2\cos \beta, \sin \beta)$, 代入 $x_1x_2 + 4y_1y_2 = 0$ 得

$4\cos \alpha \cos \beta + 4\sin \alpha \sin \beta = 4\cos(\alpha - \beta) = 0$, 不失一般性, 令 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, 从而 $A(2\cos \alpha, \sin \alpha) =$

$A\left(2\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = A(-2\sin \beta, \cos \beta)$, 则:

(1) $|OA|^2 + |OB|^2 = (4\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + (4\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = 5$

(2) 由点 $A(-2\sin \beta, \cos \beta)$, $B(2\cos \beta, \sin \beta)$ 可得直线 AB 的方程为:

$(\cos \beta - \sin \beta)x + 2(\cos \beta + \sin \beta)y - 2 = 0$, 从而坐标原点 O 到直线 AB 的距离:

$$|OH| = \frac{2}{\sqrt{(\cos \beta - \sin \beta)^2 + 4(\cos \beta + \sin \beta)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5 + 3\sin 2\beta}} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分.

17. 解: (1) 由 $a \sin B = b \cos\left(A + \frac{\pi}{6}\right)$ 得 $\sin A \sin B = \sin B \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A - \frac{1}{2} \sin A\right)$,

$\therefore \sin B \neq 0, \therefore \sqrt{3} \sin A = \cos A$, 即 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore A = \frac{\pi}{6}$; (4 分)

(2) 由题知 $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}bc$, 即 $bc = 2a^2$,

又由余弦定理知 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 从而 $b^2 + c^2 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)bc$,

所以 $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$ (10 分)

18. 解: (1) $S_8 = 4(a_4 + a_5) = 9a_4 \Rightarrow 4a_5 = 5a_4 \Rightarrow a_1 = d$, 故 $\frac{a_1}{d} = 1$; (5 分)

(2) $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n(n+1)}{2}d, \frac{1}{S_n} = \frac{2}{d} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, (8 分)

$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} = \frac{2}{d} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), 1 - \frac{1}{n+1} < 1$,

故 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} < 1$ 只需 $\frac{2}{d} \leq 1$, 即 $d < 0$ 或 $d \geq 2$ (12 分)

19. 解:(1)证明:在梯形 $ABCD$ 中, $AB = AD = DC = \frac{1}{2}BC = 2$, $\therefore \angle B = 60^\circ$,

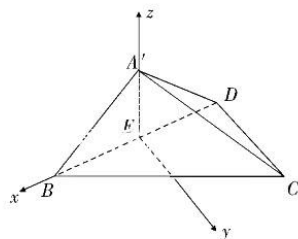
$\angle BDC = 90^\circ$,

取 BD 中点 E , 连接 $A'E, EC$, 则由 $A'B = A'D$ 得 $A'E \perp BD$, $A'E = 1$,

$EC = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$,

故 $A'C^2 = A'E^2 + EC^2$, $\therefore A'E \perp EC$, $\therefore A'E \perp$ 平面 BCD , 故 $A'E \perp CD$,

又 $CD \perp BD$, $\therefore CD \perp$ 平面 $A'BD$, $\therefore CD \perp A'B$; (5 分)



(2)以 E 为原点, 以 $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EA}$ 分别为 x, y, z 轴正方向建立空间直角坐标系, 则

$B(\sqrt{3}, 0, 0), A'(0, 0, 1), D(-\sqrt{3}, 0, 0), C(-\sqrt{3}, 2, 0), \overrightarrow{A'B} = (\sqrt{3}, 0, -1), \overrightarrow{A'C} = (-\sqrt{3}, 2, -1), \overrightarrow{DC} = (0, 2, 0)$

设平面 $A'CD$ 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} -\sqrt{3}x + 2y - z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$, 取 $x = 1$ 得 $\vec{m} = (1, 0, -\sqrt{3})$,

$\cos \langle \overrightarrow{A'B}, \vec{m} \rangle = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故直线 $A'B$ 与平面 $A'CD$ 所成角为 $\frac{\pi}{3}$ (12 分)

20. 解:(1) $\bar{x} = 1 \times \frac{6}{100} + 3 \times \frac{18}{100} + 5 \times \frac{35}{100} + 7 \times \frac{25}{100} + 9 \times \frac{10}{100} + 11 \times \frac{5}{100} + 13 \times \frac{1}{100} = 5.68$;

..... (3 分)

(2)

| | 潜伏期 ≤ 6 天 | 潜伏期 > 6 天 | 总计 |
|----------------|----------------|-------------|-----|
| 60 岁以上(含 60 岁) | 35 | 15 | 50 |
| 60 岁以下 | 24 | 26 | 50 |
| 总计 | 59 | 41 | 100 |

$K^2 = \frac{(35 \times 26 - 24 \times 15)^2 \times 100}{50 \times 50 \times 59 \times 41} \approx 5 > 3.841$, 故有 95% 的把握认为该传染病的潜伏期与患者年龄有关;

..... (7 分)

(3) 设这 10 人中有 X 人潜伏期不超过 8 天, 由题知 $X \sim B(10, 0.84)$, 则 $P(X=k) = C_{10}^k 0.84^k 0.16^{10-k}$,

$k = 0, 1, 2, \dots, 10$, 由 $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{C_{10}^{k+1} 0.84^{k+1} 0.16^{9-k}}{C_{10}^k 0.84^k 0.16^{10-k}} = \frac{21(10-k)}{4(k+1)}$,

当 $k < 8.24$ 时, $P(X=k) < P(X=k+1)$, 当 $k > 8.24$ 时, $P(X=k) > P(X=k+1)$, 故 $P(X=9)$ 最大, 所以抽到的 10 人中潜伏期不超过 8 天的人数最有可能为 9 人. (12 分)

21. 解:(1) $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + a - 1, f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, $\therefore f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单减, 在 $(1, +\infty)$ 上单增,

$f'(1) = a \geq 0$, 故 $f'(x) \geq 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增; (4 分)

(2) 由(1)知, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增, $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故 $f(x)$ 有唯一零点; (6 分)

当 $a < 0$ 时, $f'(1) < 0, x \rightarrow 0$ 时 $f'(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty$ 时 $f'(x) \rightarrow +\infty$, 故存在 $x_1 \in (0, 1), x_2 \in (1, +\infty)$

使得 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单增, 在 (x_1, x_2) 上单减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单增, $f(x_1) = (x_1 + 1) \ln x_1 + (-1 - \frac{1}{x_1} - \ln x_1)x_1 + 2 = \ln x_1 - x_1 + 1$,

易证 $\ln x_1 - x_1 + 1 < 0$, 故 $f(x_1) < 0$, $\therefore x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) \rightarrow +\infty$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内存在唯一零点. (12分)

22. 解: (1) 由题意知, P, Q 之间距离的最小值为 1 等价于 P, C_2 之间距离最小值为 2.

设 $P(x_p, y_p)$, 则 $|PC_2|^2 = (x_p - p)^2 + y_p^2 = x_p^2 - 2px_p + p^2 + 2px_p = x_p^2 + p^2 \geq p^2$, 从而 $p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$, 进而抛物线 C_1 和圆 C_2 的方程分别为:

$$C_1: y^2 = 4x \quad C_2: (x - 2)^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

(2) 若存在, 设 $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 显然 y_0, y_1, y_2 均不等于 ± 1

① 当 $\triangle ABC$ 三边所在直线中, 存在斜率不存在的情况时: 由对称性知, 若 $\triangle ABC$ 外切于圆 C_2 , 则三角形必有一个顶点为坐标原点, 不妨设为 C , 且另两个顶点连线必垂直于 x 轴, 即为直线 $AB: x = 3$,

此时直线 CA, CB 分别为: $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x, y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x$, 易知直线 CA, CB 不与圆 C_2 相切, 与假设矛盾. 所以, 此时 $\triangle ABC$ 不存在; (5分)

② 当 $\triangle ABC$ 三边所在直线斜率都存在时:

设过 A 点圆 C_2 的切线为: $y - y_0 = k(x - x_0)$, 即为: $kx - y + y_0 - \frac{1}{4}ky_0^2 = 0$

由相切知 $\frac{|2k + y_0 - \frac{1}{4}ky_0^2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \Rightarrow \left[\left(2 - \frac{1}{4}y_0^2 \right) k + y_0 \right]^2 = k^2 + 1$

$$\Rightarrow \left[\left(2 - \frac{1}{4}y_0^2 \right)^2 - 1 \right] k^2 + 2y_0 \left(2 - \frac{1}{4}y_0^2 \right) k + y_0^2 - 1 = 0 (*)$$

设 $k_{AB} = k_1, k_{AC} = k_2$, 则 k_1, k_2 为方程 (*) 的两根;

另一方面, $k_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{4}{y_1 + y_0}, k_2 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{4}{y_2 + y_0}$, 将 k_1, k_2 代入方程 (*), 并整理得:

$$(y_0^2 - 1)y_i^2 + 14y_0y_i + 63 - y_0^2 = 0 (i = 1, 2)$$

从而 $y_1 + y_2 = \frac{-14y_0}{y_0^2 - 1}, y_1y_2 = \frac{63 - y_0^2}{y_0^2 - 1} (\#)$ 9分

又直线 BC 的方程为: $4x - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0$

此时圆心 $C_2(2, 0)$ 到直线 BC 的距离 $d = \frac{|18 + y_1y_2|}{\sqrt{16 + (y_1 + y_2)^2}}$, 将 (#) 代入得:

$$d = \frac{|18 + y_1y_2|}{\sqrt{16 + (y_1 + y_2)^2}} = \frac{|17y_0^2 + 55|}{2\sqrt{4y_0^4 + 41y_0^2 + 4}}, \text{ 令 } d = 1 \Rightarrow (7y_0^2 + 55)^2 = 4(4y_0^4 + 41y_0^2 + 4)$$

整理得 $33y_0^4 + 506y_0^2 + 3009 = 0$, 此方程显然无解. 与假设矛盾, 此时 $\triangle ABC$ 不存在;

综上所述, 在抛物线 C_1 上不存在三点 A, B, C , 使得 $\triangle ABC$ 外切于圆 C_2 (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线