

理科数学

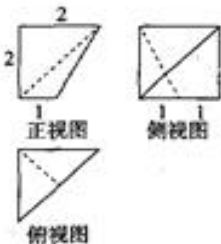
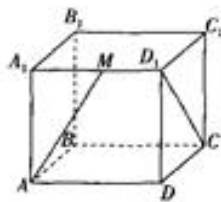
注意事项:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分150分,测试时间120分钟.
5. 考试范围:必修1,必修2第1、2章,必修4,必修5,选修2-1第1、3章,选修2-2第1、3章.

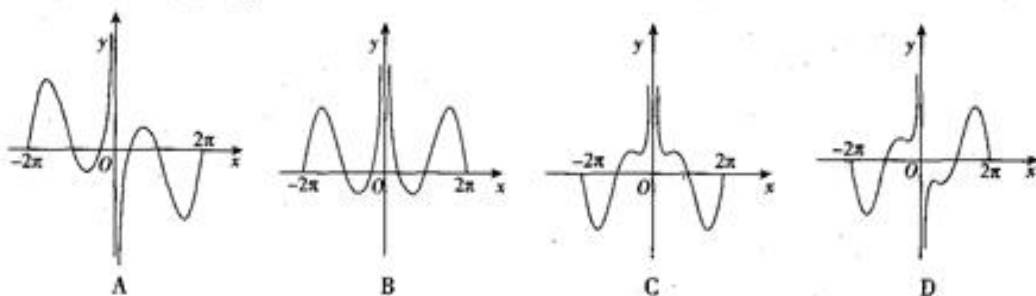
第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{y | y = 4k - 1, k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 则 $(A \cup B) \cap C =$
 A. $\{7\}$ B. $\{1, 4, 7\}$ C. $\{1, 3, 7\}$ D. $\{1, 3, 4, 7\}$
2. 已知复数 z 满足 $z = \frac{2+mi}{1-i}$ ($m \in \mathbb{R}$) 且 $|z| = 2$, 则 m 的值为
 A. 2 B. -2 或 2 C. 3 D. -3 或 3
3. 已知实数 $a > 0, b > 0$, 则“ $a > b > 1$ ”是“ $e^a + 2b > e^b + 2a$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 1 + f(x)f(x+2)$, $f(0) = 2$, 则 $f(2018) + f(2020) =$
 A. -1 B. 2 C. 1 D. $-\frac{1}{2}$
5. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 为 A_1D_1 中点, 则异面直线 AM 与 CD_1 所成角的余弦值为
 A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
6. 已知函数 $f(x)$ 为定义在 \mathbb{R} 上的增函数且其图象关于点 $(2, 0)$ 对称, 若 $g(x) = f(2-x)$, 则不等式 $g(x+3) + g(1-2x) \geq 0$ 的解集为
 A. $[2, +\infty)$ B. $[4, +\infty)$
 C. $(-\infty, 4]$ D. $[2, 4]$
7. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为
 A. $\frac{10}{3}$ B. $\frac{8}{3}$
 C. 2 D. $\frac{7}{3}$



8. 函数 $f(x) = x \sin x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4\pi^2}$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的大致图象为



9. 已知角 α, β 满足 $\sin(2\alpha + \beta) = 3\sin\beta$, 若 $\frac{1}{\tan\beta} - \frac{1}{\tan\alpha} = \lambda \tan\alpha$, 则实数 λ 的值为

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 6
10. 已知函数 $f(x) = 3x^3 - 3x$, 过点 $A(-1, 0)$ 的直线 l 与 $f(x)$ 的图象有三个不同的交点, 则直线 l 斜率的取值范围为
- A. $(-\frac{3}{4}, 6)$ B. $(-\frac{2}{3}, 6) \cup (6, +\infty)$
C. $(-\frac{3}{4}, 6) \cup (6, +\infty)$ D. $(-\frac{3}{4}, +\infty)$

11. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x)$ 的最小正周期为 π , $x = \frac{\pi}{3}$ 为函数 $g(x)$ 的一条对称轴, 则函数 $g(x)$ 的一个增区间为

- A. $(0, \frac{\pi}{6})$ B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ C. $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ D. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$
12. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足: $a_1 = 1, b_1 = 0, 2, a_{n+1} = \frac{b_{n+1} + a_n}{2}, b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n, n \in \mathbb{N}^*$, 令 $c_n = a_n - b_n$, 则满足 $c_n \leq \frac{1}{10^n}$ 的 n 的最小值为
- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. 已知函数 $f(x) = ax^3 - ax$ ($a > 0$) 的图象在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的切线互相垂直, 则 $a =$ _____.

14. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ 2x + y - 2 \geq 0 \\ 4x - y - 4 \leq 0 \end{cases}$, 存在可行解 (x, y) 满足 $mx - y - 6m = 0$, 则实数 m 的最小值为 _____.

15. 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{k-1+\ln x}{x} - 1$ ($k \in \mathbb{R}$) 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点 x_0 , 则下列说法中正确的是 _____.
(请将所有正确的序号填在横格上)

- ① $k=2$; ② $k>2$; ③ $\ln x_0 = -x_0$; ④ $\frac{1}{e} < x_0 < \frac{1}{2}$.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 已知 $PA \perp BC, PB \perp AC, PA = PB = PC = 2AB = 4$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 _____.

三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知平面向量 $a = (1, 2), b = (k, 3)$ ($k \in \mathbb{R}$).

- (1) 若 $a \parallel b$, 求 k 的值;
(2) 若 $a \perp b$, 求向量 $a+b$ 与 b 夹角的余弦值.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = |e^{-x} - m|$, $m \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{4}$ 有两个零点, 求实数 m 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n > 0, a_1 = 1, a_n = a_{n+1}(2a_n + 1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求证: $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等差数列, 并求出 a_n ;

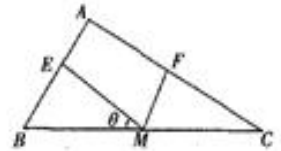
(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_{n+1}(n^2 + n)^2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若不等式 $S_n \geq \frac{999}{1000}$ 成立, 求正整数 n 的最小值.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=1, BC=2, \angle ABC=60^\circ$, M 为 BC 中点, E, F 分别为线段 AB, AC 上动点 (不包括端点), 记 $\angle EMB = \theta$.

(1) 当 $EM \perp FM$ 时, 求证: $EM = \sqrt{3}FM$;

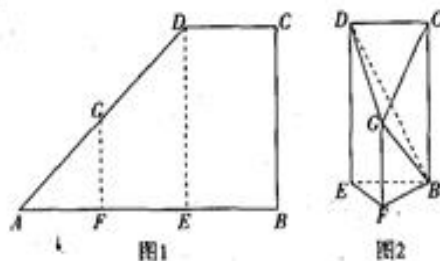
(2) 当 $\angle EMF = 60^\circ$ 时, 求四边形 $AEMF$ 面积 S 关于 θ 的表达式, 并求出 S 的取值范围.



21. (本小题满分 12 分)

如图 1, 在直角梯形 $ABCD$ 中, E, F 分别为 AB 的三等分点, $FG \parallel BC$, $ED \parallel BC$, $AB=3$, $BC=2$, 若沿着 FG, ED 折叠使得点 A 和点 B 重合, 如图 2 所示, 连结 GC, BD .

- (1) 求证: 平面 $GBD \perp$ 平面 $BCDE$;
(2) 求二面角 $B-GC-D$ 的余弦值.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x + \cos x - ax$ ($a \in \mathbf{R}$).

- (1) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围;
(2) 当 $a = -1$ 时, 若实数 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 满足 $f(x_1) + f(x_2) = 4$, 求证: $x_1 + x_2 < 0$.

专注名校多元录取

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站 (www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2020 届高三上学期期中考试试题及答案汇总 (更新下载中)，点击链接获得
<http://www.zizzs.com/c/201911/40242.html>