高二数学参考答案、提示及评分细则

1. A　因为 $x^2-4x<5$，所以 $x^2-4x-5<0$，所以 $-1<x<5$，所以 $N=(-1,5)$，故 $M\cap N=\{1,2,3,4\}$. 故选 A.

2. B　$z+\mathrm{i}=\frac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$，故 $z=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$，则 $|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$. 故选 B.

3. A　因为 $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，显然 $\frac{5\pi}{6}$ 写不成 $\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的形式，故由 p 推不出 q，若 $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，即由 q 可推出 p，故 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 A.

4. D　因为 α 为锐角，所以 $\tan\alpha>0$，又 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4}{3}$，所以 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\sin^2\alpha-3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{7}{5}$. 故选 D.

5. D　由图知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，排除 A；由图象知 $f(x)$ 为奇函数，排除 C；对于 B，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，与图象所体现的几何直观不符，排除 B；对于 D，易知 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，符合图象所体现的几何直观. 故选 D.

6. C　$1\ 260=2\times2\times3\times3\times5\times7$，从 2，2，3，3，5，7 中任选 3 个数组成三位数，可以分为两类：第一类，三个数互不相同，共有 $A_4^3=24$ 个；第二类，含有 2 个 2 或 2 个 3，共有 $2C_3^1C_3^1=18$ 个，所以一共有 42 个. 故选 C.

7. C　设 C 的半焦距为 $c(c>0)$，则直线 AF_1 的方程为 $x=-c$，分别与 C 的方程和圆的方程联立，易求得 A,B 的纵坐标分别为 $\frac{b^2}{a}$，b，由题意知 $\frac{b^2}{a}=\frac{b}{2}$，所以 $a=2b$，又 $a^2=b^2+c^2$，所以 $c=\sqrt{3}b$，所以 $\angle F_1PO=60^\circ$，所以 $\angle F_1PF_2=120^\circ$. 故选 C.

8. B　令 $f(x)=(1.5-x)e^x$，则 $f'(x)=(0.5-x)e^x$，易得 $f(x)$ 在 $(-\infty,0.5)$ 上单调递增，所以 $f(0.5)>f(0.4)>f(0)$，因为 $b=f(0.4)$，$c=f(0.5)$，$a=1.45<1.5=f(0)$，所以 $c>b>a$. 故选 B.

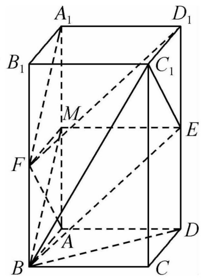
9. BCD　取 $a=3,b=2,c=1$，则 $\frac{b}{a-c}=1=\frac{c}{a-b}$，故 A 错误；因为 $a>b>0$，所以 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant2$，又 $a\neq b$，则 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$，故 B 正确；$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}>0$，所以 $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$，故 C 正确；因为 $a+c>b+c>0$，所以 $0<\frac{1}{a+c}<\frac{1}{b+c}$，又 $0<b<a$，所以 $\frac{b}{a+c}<\frac{a}{b+c}$，故 D 正确. 综上，选 BCD.

10. AB　$f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，由题意得 $\omega\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\omega=1+3k(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递减，所以 $\begin{cases}-\frac{\omega\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{3\pi}{2}+2k_1\pi,\\-\frac{\omega\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\leqslant-\frac{\pi}{2}+2k_1\pi\end{cases}$ $(k_1\in\mathbf{Z})$，解得 $4-24k_1\leqslant\omega\leqslant\frac{16}{3}-8k_1(k_1\in\mathbf{Z})$. 又 $\omega=1+3k$ $(k\in\mathbf{Z})$ 且 $\omega>0$，所以 $\omega=4$，所以 $f(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$，又 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $g(x)=2\cos 4x$，易知 $g(x)$ 为偶函数；因为 $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$，故 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{2}$ 对称，当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$4x\in[\pi,2\pi]$，所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增. 故 A 和 B 正确，C 和 D 错误. 综上，选 AB.

11. ABD　设 C 的半焦距为 $c(c>0)$，则 $F_1(-c,0)$，由点到直线的距离公式，易得 $|MF_1|=b$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OMF_1$ 中，$|OM|=$

$\sqrt{|OF_1|^2-|F_1M|^2}=\sqrt{c^2-b^2}=a$,所以 F_1M 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切,则 A 正确,C 错误;因为 O 为 F_1F_2 的中点,所以 $S_{\triangle MF_1F_2}=2S_{\triangle F_1MO}=2\times\frac{1}{2}|OM|\cdot|F_1M|=ab$,则 B 正确;在 Rt$\triangle OF_1M$ 中,$\cos\angle OF_1M=\frac{|MF_1|}{|OF_1|}=\frac{b}{c}$,在$\triangle MF_1F_2$中,由余弦定理,得$|MF_2|^2=|MF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|MF_1|\cdot|F_1F_2|\cos\angle OF_1M$,即 $3b^2=b^2+4c^2-2b\cdot 2c\cdot\frac{b}{c}$,化简得 $2c^2=3b^2$,又 $c^2=a^2+b^2$,所以 $c^2=3a^2$,解得 $e=\sqrt{3}$,D 正确.综上,选 ABD.

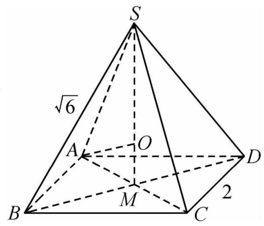
12. ABD　如图,取 AA_1 的中点 M,连接 EM,BM,FM,因为 E 为 DD_1 的中点,所以 $EM/\!/AD$,由长方体性质可知 $AD\perp$平面 ABB_1A_1,则 $EM\perp$平面 ABB_1A_1,又因为 $AF\subset$平面 ABB_1A_1,所以 $EM\perp AF$.依题意,四边形 $ABFM$ 是正方形,所以 $BM\perp AF$,因为 $EM\cap BM=M$,所以 $AF\perp$平面 EMB,又因为 $BE\subset$平面 EMB,所以 $AF\perp BE$,故 A 正确;因为 F,M 分别为 BB_1,AA_1 的中点,所以 $A_1M/\!/BF$ 且 $A_1M=BF$,所以四边形 A_1MBF 是平行四边形,所以 $A_1F/\!/BM$,又 $BM\cap$平面 $BC_1E=B$,所以 A_1F 与平面 BC_1E 相交,故 B 正确;连接 BD,由长方体的性质知 $ED\perp$平面 $ABCD$,所以$\angle EBD$是BE与平面$ABCD$所成角,在 Rt$\triangle BDE$ 中,$\cos\angle EBD=\frac{BD}{BE}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,故 C 错误;在 Rt$\triangle BCC_1$ 中,$BC_1^2=BC^2+CC_1^2=5$,在 Rt$\triangle D_1C_1E$ 中,$C_1E^2=D_1C_1^2+D_1E^2=2$,在 Rt$\triangle BDE$ 中,$BE^2=DE^2+BD^2=3$,因为 $BE^2+C_1E^2=BC_1^2$,所以 $C_1E\perp BE$,因为 $BF/\!/D_1E$ 且 $BF=D_1E$,所以四边形 BED_1F 是平行四边形,所以 $FD_1/\!/BE$,所以 $C_1E\perp FD_1$,故 D 正确.综上,选 ABD.



13. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=0-1=-1$,$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{5}$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

14. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.(答案不唯一,符合条件即可得分)　由 $\forall x,y\in\mathbf{R}$,$f(x+y)=f(x)f(y)$,知 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$满足该条件;又当 $x>0$ 时,$f(x)<1$,可得 $0<a<1$,故 $f(x)$可以为 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

15. $\frac{9\pi}{2}$　如图,连接 AC,BD 交于点 M,连接 SM,则 $SM\perp$平面 $ABCD$,所以正四棱锥 S-$ABCD$ 的外接球球心 O 在 SM 上.连接 OA,设球 O 的半径为 R,则 $SM=\sqrt{6-2}=2$.在 Rt$\triangle AOM$ 中,$OA^2=OM^2+AM^2$,即 $R^2=(2-R)^2+(\sqrt{2})^2$,解得 $R=\frac{3}{2}$,所以正四棱锥 S-$ABCD$ 的外接球的体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{9\pi}{2}$.



16. $n\times2^{n+1}$(2 分)　$\frac{2}{3}$(3 分)　因为 $a_1=4$,$a_{n+1}=2a_n$,所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$,故$\{a_n\}$是首项为 4,公比为 2的等比数列,所以 $a_n=2^{n+1}$,所以 $a_nb_n=2^{n+1}\cdot\frac{n+1}{2}=(n+1)\cdot2^n$,所以 $T_n=2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n+1)\times2^n$①,$2T_n=2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+(n+1)\times2^{n+1}$②,①−②得$-T_n=4+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot2^{n+1}=4+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\cdot2^{n+1}=-n\cdot2^{n+1}$,所以 $T_n=n\cdot2^{n+1}$.因为不等式$\frac{a_{n+1}}{kT_n}\leqslant\frac{n^2-9n+36}{n^2}$对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,所以$\frac{2}{k}\leqslant\frac{n^2-9n+36}{n}=n+\frac{36}{n}-9$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,所以$\frac{2}{k}\leqslant\left(n+\frac{36}{n}-9\right)_{\min}$.因为 $n+\frac{36}{n}\geqslant2\sqrt{n\times\frac{36}{n}}=12$,当且仅当 $n=6$ 时等号成立,所以$\left(n+\frac{36}{n}-9\right)_{\min}=12-9=3$,所以$\frac{2}{k}\leqslant3$,又 $k>0$,所以 $k\geqslant\frac{2}{3}$,故 k 的最小值是$\frac{2}{3}$.

17. 解：(1)由已知及正弦定理，得 $2\sin B\cos A-\sin C\cos A=\sin A\cos C$， ………… 1分

所以 $2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)$， ………… 2分

在$\triangle ABC$中，$A+C=\pi-B$，所以 $\sin(A+C)=\sin B$，

所以 $2\sin B\cos A=\sin B$， ………… 3分

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$， ………… 4分

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………… 5分

(2)由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

由 $A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$及 $b^2+c^2=9$，得 $3=9-2bc\times\frac{1}{2}$，即 $bc=6$， ………… 6分

所以$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=9+12=21$，即 $b+c=\sqrt{21}$， ………… 8分

以 b,c 为两根构造关于 x 的一元二次方程，得 $x^2-\sqrt{21}x+6=0$，

因为 $\Delta=21-4\times 6<0$，所以该方程无实根，

从而该三角形不存在. ………… 10分

18. (1)解：当 $\lambda=3$ 时，$a_{n+1}=3a_n+4$，$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$， ………… 2分

又 $a_1+2=3\neq 0$，所以$\{a_n+2\}$是首项为 3，公比为 3 的等比数列， ………… 3分

所以 $a_n+2=3\cdot 3^{n-1}=3^n$，即 $a_n=3^n-2$. ………… 4分

(2)证明：当 $\lambda=1$ 时，$a_{n+1}=a_n+4$，则 $a_{n+1}-a_n=4$，

所以$\{a_n\}$是首项为 1，公差为 4 的等差数列， ………… 5分

所以 $a_n=1+4(n-1)=4n-3$， ………… 6分

所以 $S_n=\frac{n(1+4n-3)}{2}=2n^2-n$， ………… 7分

所以$\frac{1}{S_n+n}=\frac{1}{2n^2}$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{S_n+n}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n^2}<\frac{1}{2}\times\frac{1}{n^2-n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$， ………… 9分

当 $n\geqslant 2$ 时，

$T_n=\frac{1}{2\times 1^2}+\frac{1}{2\times 2^2}+\frac{1}{2\times 3^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ ………… 10分

$=1-\frac{1}{2n}<1$， ………… 11分

当 $n=1$ 时，$T_1=\frac{1}{2}<1$，综上，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$T_n<1$. ………… 12分

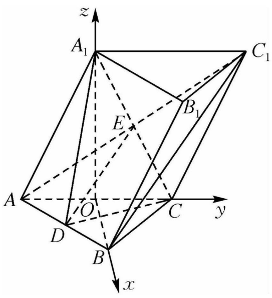
19. (1)证明：连接 AC_1 交 A_1C 于点 E，连接 DE，则 E 为 AC_1 的中点， ………… 1分

因为 D 为 AB 的中点，所以 $DE/\!/BC_1$， ………… 2分

又 $DE\subset$平面 A_1CD，$BC_1\not\subset$平面 A_1CD，

所以 $BC_1/\!/$平面 A_1CD. ………… 4分

(2)解：取 AC 的中点 O，连接 OB，因为 $AA_1=A_1C=2$，所以 $A_1O\perp AC$， ………… 5分



因为平面 $ACC_1A_1\perp$平面 ABC，平面 $ACC_1A_1\cap$平面 $ABC=AC$，$A_1O\subset$平面 ACC_1A_1，

所以 $A_1O\perp$平面 ABC， ………… 6分

又 $OB\subset$平面 ABC,所以 $A_1O\perp OB$.

因为 $BC=BA$,O 为 AC 的中点,所以 $OB\perp AC$,所以 OB,OC,OA_1 两两垂直,以 O 为坐标原点,直线 OB,OC,OA_1 分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系(如图所示),则 $C(0,1,0)$,$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,$A_1(0,0,\sqrt{3})$,

所以$\overrightarrow{A_1C}=(0,1,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$. ……………………………… 8 分

设平面 A_1CD 的一个法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}y-\sqrt{3}z=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}y=0,\end{cases}$

令 $z=1$,解得 $x=3$,$y=\sqrt{3}$,故 $\boldsymbol{n}=(3,\sqrt{3},1)$,……………………………… 9 分

显然 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$是平面 A_1AC 的一个法向量, ……………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{1\times\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$,……………………………… 11 分

设二面角 $D-A_1C-A$ 的大小为θ,则 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)^2}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$. ……………………………… 12 分

20. 解:(1)调查的男生人数为 $100\times55\%=55$(人),调查的女生人数为 $100-55=45$(人),

零假设为 H_0:对“夸父一号”卫星相关知识感兴趣与学生的性别无关联.

	感兴趣	不感兴趣	合计
男生	40	15	55
女生	20	25	45
合计	60	40	100

……………………………… 1 分

根据列联表中的数据,经计算得 $\chi^2=\frac{100\times(40\times25-15\times20)^2}{60\times40\times55\times45}\approx8.249>7.879=x_{0.005}$, ……………………………… 3 分

所以根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立检验,推断 H_0 不成立,即认为对“夸父一号”探测卫星相关知识是否感兴趣与学生的性别有关联,此时推断犯错误的概率不大于 0.005. ……………………………… 4 分

(2)所求概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{15}{100}}{\frac{55}{100}}=\frac{3}{11}$. ……………………………… 7 分

或者 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{15}{55}=\frac{3}{11}$. ……………………………… 7 分

(3)按比例分配的分层随机抽样的方法抽取的男生数为 $40\times\frac{6}{60}=4$ 人,女生人数为 $20\times\frac{6}{60}=2$ 人,

所以 X 的可能取值为 0,1,2, ……………………………… 8 分

所以 $P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$,$P(X=1)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$,$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$,……………………………… 10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

……………………………… 11 分

所以 $E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$. ……………………………… 12 分

21.(1)解:当 $a=1$ 时,$f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}$, …… 1分

所以 $f(\mathrm{e})=1, f'(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$, …… 3分

故所求的切线方程为 $y-1=\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$,即 $x-\mathrm{e}y=0$. …… 4分

(2)证明:法一:要证 $f(x)<\frac{8\mathrm{e}^{x-2}}{x}$,即证 $\frac{8}{a}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x^2}\cdot\frac{x}{\mathrm{e}}>\ln x$. …… 5分

先证 $\frac{x}{\mathrm{e}}\geqslant\ln x$.

设 $p(x)=x-\mathrm{e}\ln x(x>0)$,则 $p'(x)=1-\frac{\mathrm{e}}{x}=\frac{x-\mathrm{e}}{x}$, …… 6分

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时,$p'(x)<0$;当 $x>\mathrm{e}$ 时,$p'(x)>0$,

所以 $p(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减,在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增, …… 7分

所以 $x=\mathrm{e}$ 是 $p(x)$ 的极小值点,也是 $p(x)$ 的最小值点,且 $p(x)_{\min}=p(\mathrm{e})=0$,

所以 $x-\mathrm{e}\ln x\geqslant 0$,即 $\frac{x}{\mathrm{e}}\geqslant\ln x$ 成立. …… 8分

再证 $\frac{8}{a}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x^2}>1$.

设 $q(x)=\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x^2}(x>0)$,则 $q'(x)=\frac{\mathrm{e}^{x-1}(x-2)}{x^3}$, …… 9分

当 $0<x<2$ 时,$q'(x)<0$;当 $x>2$ 时,$q'(x)>0$,

所以 $q(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, …… 10分

所以 $x=2$ 是 $q(x)$ 的极小值点,也是 $q(x)$ 的最小值点,且 $q(x)_{\min}=q(2)=\frac{\mathrm{e}}{4}$,

所以 $\frac{8}{a}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x^2}>\frac{8}{2\mathrm{e}}\cdot\frac{\mathrm{e}}{4}=1$.

综上,$f(x)<\frac{8\mathrm{e}^{x-2}}{x}$ 成立. …… 12分

法二:要证 $f(x)<\frac{8\mathrm{e}^{x-2}}{x}$,即证 $\frac{8}{a}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x-2}}{x^2}>\frac{\ln x}{x}$. …… 5分

设 $F(x)=\frac{\mathrm{e}^{x-2}}{x^2}(x>0)$,则 $F'(x)=\frac{\mathrm{e}^{x-2}(x-2)}{x^3}$, …… 6分

当 $0<x<2$ 时,$F'(x)<0$;当 $x>2$ 时,$F'(x)>0$,

所以 $F(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, …… 7分

所以 $x=2$ 是 $F(x)$ 的极小值点,也是 $F(x)$ 的最小值点,且 $F(x)_{\min}=F(2)=\frac{1}{4}$, …… 8分

设 $G(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则 $G'(x)=-\frac{\ln x-\ln\mathrm{e}}{x^2}$, …… 9分

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时,$G'(x)>0$;当 $x>\mathrm{e}$ 时,$G'(x)<0$,

所以 $G(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增,在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减, …… 10分

所以 $x=\mathrm{e}$ 是 $G(x)$ 的极大值点,也是 $G(x)$ 的最大值点,且 $G(x)_{\max}=G(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$, …… 11分

所以$\frac{8}{a}\cdot\frac{e^{x-2}}{x^2}>\frac{8}{2e}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{e}\geqslant\frac{\ln x}{x}$.

综上,$f(x)<\frac{8e^{x-2}}{x}$成立. …………………………………………………………………… 12 分

22.(1)解:若 C 的焦点在 x 轴上,设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$,

将点(2,4)代入,得 $4^2=4p$,解得 $p=4$,故 C 的方程为 $y^2=8x$; …………………………… 2 分

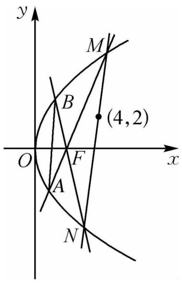
若 C 的焦点在 y 轴上,设抛物线 C 的方程为 $x^2=2py(p>0)$,

将点(2,4)代入,得 $2^2=8p$,解得 $p=\frac{1}{2}$,故 C 的方程为 $x^2=y$,

综上,C 的方程为 $y^2=8x$ 或 $x^2=y$. …………………………………………………… 4 分

(2)证明:由(1)知抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$.

若直线 l 不过点 F,如右图,



设 $M\left(\frac{y_1^2}{8},y_1\right)$,$N\left(\frac{y_2^2}{8},y_2\right)$,$A\left(\frac{y_3^2}{8},y_3\right)$,$B\left(\frac{y_4^2}{8},y_4\right)$, …………………………… 5 分

由题意可知直线 MN 的斜率存在且不为 0,则直线 MN 的斜率 $k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{8}-\frac{y_2^2}{8}}=\frac{8}{y_1+y_2}$,

所以直线 MN 的方程为 $y-y_1=\frac{8}{y_1+y_2}\left(x-\frac{y_1^2}{8}\right)$,即 $8x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$, ……………… 7 分

同理直线 AM,BN 的方程分别为 $8x-(y_1+y_3)y+y_1y_3=0$,$8x-(y_2+y_4)y+y_2y_4=0$, …………… 8 分

由直线 MN 过定点(4,2),可得 $2(y_1+y_2)-y_1y_2=32$,

由直线 AM,BN 过焦点 $F(2,0)$,可得 $y_1y_3=y_2y_4=-16$, ……………………………… 9 分

直线 AB 的方程为 $8x-(y_3+y_4)y+y_3y_4=0$,

由 $y_1y_3=y_2y_4=-16$,得 $8x+\left(\frac{16}{y_1}+\frac{16}{y_2}\right)y+\frac{256}{y_1y_2}=0$,

所以 $8y_1y_2x+16(y_1+y_2)y+256=0$,

即 $y_1y_2x+2(y_1+y_2)y+32=0$, ………………………………………………………… 10 分

又因为 $2(y_1+y_2)-y_1y_2=32$,所以 $(x+y)y_1y_2+32(y+1)=0$.

令 $\begin{cases}x+y=0,\\y+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-1,\end{cases}$ 故直线 AB 恒过定点$(1,-1)$. ……………………………… 11 分

若直线 l 过点 F,直线 AB 即为直线 MN,其方程为 $y-0=\frac{2-0}{4-2}(x-2)$,即 $y=x-2$,显然直线过点$(1,-1)$.

综上,直线 AB 过定点$(1,-1)$. ……………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。