理科数学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。共 4 页,总分 150 分,考试时间 120 分钟。

第Ⅰ卷(选择题　共 60 分)

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

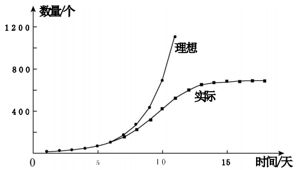
1. 已知集合 $A=\{x|2<x<5\}$,$B=\{x|\log_3 x>1\}$,则 $A\cup B=$

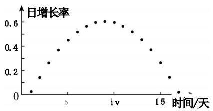
A. $(3,5)$　　B. $(2,5)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(0,5)$

2. 已知复数 z 满足 $\dfrac{\overline{z}+\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}=2$,则 $|z|=$

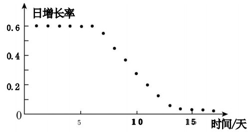
A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 5

3. 数列$\{a_n\}$表示第 n 天午时某种细菌的数量.细菌在理想条件下第 n 天的日增长率 $r_n=0.6$ $\left(r_n=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n},n\in\mathbf{N}^*\right)$.当这种细菌在实际条件下生长时,其日增长率 r_n 会发生变化.下图描述了细菌在理想和实际两种状态下细菌数量 Q 随时间的变化规律.对这种细菌在实际条件下日增长率 r_n 的规律描述正确的是

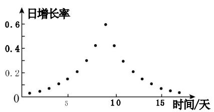




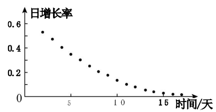
A



B

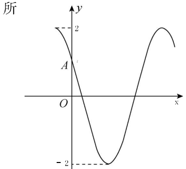


C



D

4. 将函数 $f(x)=2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后,所得函数图象如图所示,则 φ 的最小值为



A. $\dfrac{\pi}{12}$

B. $\dfrac{\pi}{6}$

C. $\dfrac{5\pi}{12}$

D. $\dfrac{5\pi}{6}$

5. 已知 A,B 为圆 $C:x^2+y^2-2x-4y+3=0$ 上的两个动点,P 为弦 AB 的中点.若 $\angle ACB=90^\circ$,则点 P 的轨迹方程为

A. $(x-1)^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{4}$　　B. $(x-1)^2+(y-2)^2=1$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2=\dfrac{1}{4}$　　D. $(x+1)^2+(y+2)^2=1$

6. 已知 $\sin 2\alpha-m\cos 2\alpha=1\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$,则 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=$

A. $-\dfrac{1}{m}$　　B. $\dfrac{1}{m}$　　C. $-m$　　D. m

7. 若椭圆 $E:x^2+\dfrac{y^2}{1-m^2}=1(0<m<1)$上存在点 P,满足$|OP|=m$(O 为坐标原点),则 E 的离心率的取值范围为

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$在区间$[-1,+\infty)$上单调递增,若 $f(2)=0$,且函数 $f(x-1)$为偶函数,则不等式 $xf(x)>0$ 的解集为

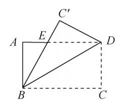
A. $(2,+\infty)$　　B. $(-4,-1)\cup(0,+\infty)$

C. $(-4,+\infty)$　　D. $(-4,0)\cup(2,+\infty)$

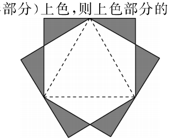
9. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为 F,以 OF(O 为坐标原点)为直径的圆与 C 的渐近线分别交于 A,B 两点(异于点 O).若$|AB|=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$,则 C 的离心率为

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

10. 某校计划举办冬季运动会,并在全校师生中征集此次运动会的会徽.某学生设计的《冬日雪花》脱颖而出,它的设计灵感来自三个全等的矩形的折叠拼凑.已知其中一块矩形材料如图①所示,将$\triangle BCD$ 沿 BD 折叠,折叠后 BC 交 AD 于点 E,$BD=\sqrt{5}$ cm,$\cos\angle BED=-\dfrac{3}{5}$.现需要对会徽的六个直角三角形(图②阴影部分)上色,则上色部分的面积为



①



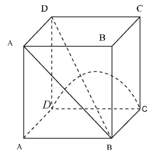
②

A. $\dfrac{9}{4}\mathrm{cm}^2$　　B. $\dfrac{5}{4}\mathrm{cm}^2$　　C. $\dfrac{3}{5}\mathrm{cm}^2$　　D. $1\ \mathrm{cm}^2$

11. 若直线 $y=2x$ 与曲线 $y=a\ln x+2$ 相切,则 $a=$

A. 1　　B. 2　　C. e　　D. e^2

12. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 是空间中任意一点，下列命题正确的个数是



①若 P 为棱 CC_1 的中点，则异面直线 AP 与 CD 所成角的正切值为$\frac{\sqrt{5}}{2}$；

②若 P 在线段 A_1B 上运动，则 $AP+PD_1$ 的最小值为$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$；

③若 P 在半圆弧 CD 上运动，当三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积最大时，三棱锥 $P\text{-}ABC$ 外接球的表面积为 2π；

④若过点 P 的平面 α 与正方体每条棱所成角相等，则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(x,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2-x)$，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相反，则 $x=$________.

14. 已知样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数$\overline{x}$与方差 s^2 满足如下关系式：$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2)-n\cdot(\overline{x})^2}{n}$.若已知 15 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_{15}$的平均数为 6，方差为 9，现从原 15 个数中剔除 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 这 5 个数，且剔除的这 5 个数的平均数为 8，方差为 5，则剩余的 10 个数 $x_6,x_7,\cdots,x_{15}$的方差为________.

15. 已知圆台的下底面半径是上底面半径的 2 倍，其侧面展开图是一个面积为 6π 的半圆环，则该圆台的高为________.

16. 若对于 $\forall x>1$，不等式 $a\ln(ax)<2x\ln x$ 恒成立，则 a 的最大值为________.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. (12 分)

自《"健康中国 2030"规划纲要》颁布实施以来，越来越多的市民加入到绿色运动"健步走"行列，以提高自身的健康水平与身体素质.某调查小组为了解本市不同年龄段的市民在一周内健步走的情况，在市民中随机抽取了 200 人进行调查，部分结果如下表所示，其中一周内健步走少于 5 万步的人数占样本总数的$\frac{3}{10}$，45 岁以上(含 45 岁)的人数占样本总数的$\frac{3}{5}$.

	一周内健步走≥5 万步	一周内健步走<5 万步	总计
45 岁以上(含 45 岁)	90		
45 岁以下			
总计			

(1)请将题中表格补充完整，并判断是否有 90% 的把握认为该市市民一周内健步走的步数与年龄有关；

(2)现从样本中 45 岁以上(含 45 岁)的人群中按一周内健步走的步数是否少于 5 万步用分层抽样法抽取 8 人做进一步访谈，然后从这 8 人中随机抽取 2 人填写调查问卷.记抽取的两人中一周内健步走步数不少于 5 万步的人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024

18. (12 分)

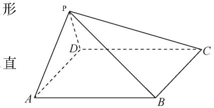
已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项积为 T_n，若 $a_1=2$，$T_n=a_{n+1}^{\frac{n}{2}}$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记 $S_n=na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+2a_{n-1}+a_n$，求 S_n.

19. (12 分)

如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$\triangle PAD$ 为等边三角形，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle PAB=\angle PDC$.



(1)证明：四边形 $ABCD$ 为矩形；

(2)若 $PA=AB=2$，当四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积最大时，求直线 PB 与平面 PDC 所成角的正弦值.

20. (12 分)

已知抛物线 $C:y^2=8x$，过点$(2,0)$作直线 l_1 与 C 交于 A，B 两点，过点$(4,0)$作直线 l_2 与 C 交于 M，N 两点，当直线 l_1，l_2，AM，BN 的斜率存在且不为 0 时，将其分别记为 k_1,k_2,k_3,k_4.

(1)证明：$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}$；

(2)若 $l_1/\!/l_2$，$S_{\triangle AMN}=\lambda S_{\triangle ABM}$，求 λ 的取值范围.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=(x-2)e^x-ax+a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)当 $a<e$ 时，讨论 $f(x)$的零点个数.

(二)选考题：共 10 分。请考生在 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}t,\\y=\sqrt{1-t^2}\end{cases}$($t$ 为参数)，以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

(1)求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2)在极坐标系中，射线 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\geqslant0)$与曲线 C_1 交于点 A，射线 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\geqslant0)$与曲线 C_2 交于点 B，求$\triangle AOB$ 的面积.

23. [选修 4—5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=x|x+a|+2x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=-2$ 时，解不等式 $f(x)>3$；

(2)若 $f(x)<2x+1$ 对任意的 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$恒成立，求实数 a 的取值范围.