

考号:

姓名:

班级:

数学

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x^2 + 2x - 3 > 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-3, -2\}$ B. $\{-3, -2, -1\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3\}$

2. 已知复数 z 满足 $(z-1)(2-3i) = 3+2i$, 则 $z =$

- A. 0 B. i C. $-1+i$ D. $1+i$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{3}$, 且 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4\sqrt{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是

- A. $2\sqrt{6}$ B. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{2}$

4. 某地为践行“绿水青山就是金山银山”的人与自然和谐共生的发展理念, 对该地企业已处理的废水进行实时监测. 下表是对 A, B 两家企业 10 天内已处理的废水的某项指标值的检测结果. 下列说法正确的是

A	43	72	73	98	63	86	65	75	81	78
B	82	68	71	37	61	65	58	68	77	94

- A. A 企业该指标值的极差较大 B. A 企业该指标值的中位数较小
C. B 企业该指标值的平均数较大 D. B 企业该指标值的众数与中位数相等
5. 核酸检测是新型冠状病毒感染疫情防控的一项重要举措. 某社区每周六组织 A, B, C 三个小区的居民进行核酸检测. 现有甲、乙、丙、丁、戊 5 名大学生报名参加这三个小区的志愿者服务工作, 要求每个小区至少分配 1 人, 且甲和乙必须分配在同一个小区, 则不同的分配方案共有
- A. 72 种 B. 36 种 C. 18 种 D. 6 种

6. 已知 $x^{-\frac{1}{3}} > y^{-\frac{1}{3}}$, 则

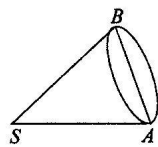
- A. $x(y-1) > 0$ B. $\log_2 \frac{1}{x^2+1} < \log_2 \frac{1}{y^2+1}$
C. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^y$ D. $x^y > y^x$

7. 已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点, 过 F 作斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交椭圆 C 于 M, N 两点, 若线段 MN 的长等于椭圆 C 短轴长的 $\frac{3}{7}$, 则椭圆 C 的离心率为
- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8. 已知函数 $f(x) = (x^2 + 2)(x^3 - 3ax^2 + b)$ 满足: ① 定义域为 \mathbf{R} ; ② $\frac{1}{2} < b < 4$; ③ 有且仅有两个不同的零点 x_1, x_2 , 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的取值范围是
- A. $(-2, -1)$ B. $(-1, -\frac{1}{2})$ C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(1, 2)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 陀螺是中国民间最早的娱乐工具之一, 也作陀罗, 闽南语称作“干乐”, 北方叫作“冰尜(gó)”或“打老牛”. 传统古陀螺大致是木制或铁制的倒圆锥形. 现有一圆锥形陀螺(如图所示), 其底面半径为 3, 将其放倒在一平面上, 使圆锥在此平面内绕圆锥顶点 S 滚动, 当圆锥在平面内转回原位置时, 圆锥本身恰好滚动了 3 周, 则



第 9 题图

- A. 圆锥的母线长为 9
B. 圆锥的表面积为 36π
C. 圆锥的侧面展开图(扇形)的圆心角为 60°
D. 圆锥的体积为 $12\sqrt{2}\pi$
10. 某人参加国际互联网大会, 可从互联网与云计算、互联网与信息服务、互联网与金融服务、互联网与竞技体育四个分会中随机选择分会参加. 已知该参会者参加互联网与云计算分会的概率为 $\frac{2}{3}$, 参加另外三个分会的概率都是 $\frac{1}{2}$, 参加每个分会相互独立, 用随机变量 X 表示该参会者参加分会的个数, 则下列说法中正确的是
- A. 参会者至多参加一个分会的概率为 $\frac{1}{4}$ B. $P(X=2) = \frac{5}{8}$
C. $P(X=4) = \frac{1}{12}$ D. $E(X) = \frac{11}{8}$

11. 已知函数 $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 满足 $f(x) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$,

对于 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, |f(x_1) - f(x_2)|_{\max} \leq 4$, 则下列结论中正确的有

A. 函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

B. 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$)

C. 不等式 $f(x) - 1 \geq 0$ 的解集为 $\left[-\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{7\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$)

D. 将函数 $f(x)$ 的图像保持纵坐标不变, 横坐标伸长为原来的 2 倍, 然后将其向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x) = 2\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_2 作直线 l 交双曲线 C 的右支于 A, B 两点, 其中点 A 在第一象限, 且 $|AF_2| = 3|BF_2|, |AB| = |AF_1|$, 则

A. 双曲线 C 的离心率为 2

B. 过点 F_2 作双曲线其中一条渐近线的垂线, 垂足为 P , 则 $|PF_1| = 2\sqrt{5}a$

C. 若 Q 为 AB 的中点, 则直线 OQ (其中 O 为坐标原点) 和直线 AB 的斜率之积为 3

D. $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆半径和 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆半径之比为 $\frac{5}{3}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 某函数 $f(x)$ 满足以下三个条件:

① $g(x) = f(x) - 1$ 是偶函数; ② $g(2-x) + g(x) = 0$; ③ $f(x)$ 的最大值为 4.

请写出一个满足上述条件的函数 $f(x)$ 的解析式 _____.

14. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_3 = \frac{7}{4}, S_6 = \frac{63}{4}$, 则 $\log_2 a_3 + \log_2 a_5 =$ _____.

15. 已知直线 $x - y - 1 = 0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点, 其中点 $A(2, 1)$, 若 $|AB| = 2\sqrt{2}$, 且圆 C 与 y 轴相切, 则圆 C 的方程为 _____.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA = PB = CA = CB = 10, AB = PC = 12$. 若三棱锥的四个顶点都在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,其中 $c=2\sqrt{3}$, $(a+c)(\sin A - \sin C) = (a-b)\sin B$.

(1)求 C ;

(2)求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

18. (12 分)已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $S_{n+1} = \frac{a_n+2}{a_n} \cdot S_n$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

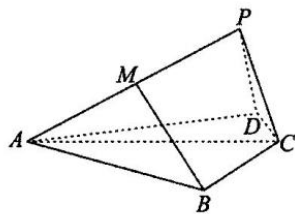
(2)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1+2^2 \cdot b_2+3^2 \cdot b_3+\dots+n^2 \cdot b_n=a_n(n \in \mathbf{N}^*)$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和,求证: $T_n < 2$.



19. (12分) 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=AD=2\sqrt{3}$,
 $BC=DC=\frac{1}{2}AC=2$.

(1) 若点 M 是棱 AP 上一点, 且 $BM \parallel$ 平面 PCD , 求 $\frac{AM}{AP}$;

(2) 若 $\angle ACP=60^\circ$, $PC=2$, 平面 PCD 与平面 PAB 交于直线 l , 求直线 l 与平面 PAD 所成角的正弦值.



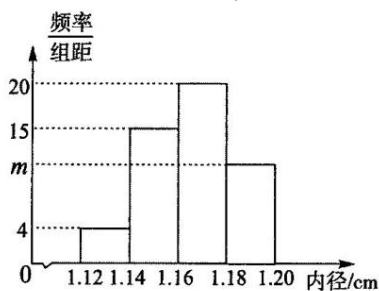
第 19 题图



20. (12分) 某精密检测仪器厂锐意改革, 实施科学化、精细化管理, 产量大幅提高. 产品制成后先去掉残次品, 然后随机按每箱 20 件装箱. 现从中随机抽取 4 箱, 测得其内径(单位: cm), 将结果分成 4 组: $[1.12, 1.14)$, $[1.14, 1.16)$, $[1.16, 1.18)$, $[1.18, 1.20]$, 并绘制出如图所示的频率分布直方图.

(1) 估计这批产品每件内径的平均值 \bar{x} (残次品除外, 同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值为代表);

(2) 若这批产品每件内径 X 服从正态分布 $N(\mu, 0.0001)$, 其中 μ 的近似值为产品每件内径的平均值 \bar{x} , 请估计 1500 箱产品中内径位于 $(1.1452, 1.1752)$ 内产品的件数;



第 20 题图

(3) 规定这批产品中内径位于 $[1.14, 1.18)$ 内的产品为优质品, 视频率为概率, 随机打开一箱, 记优质品的件数为 ξ , 求 ξ 的数学期望.

附: 若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$,

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$.

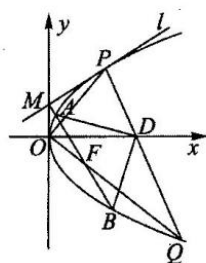
21. (12分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F, D(1, 0)$, 点 P 是在第一象限内 C 上的一个动点, 当 DP 与 x 轴垂直时, $|PF| = \frac{5}{4}$, 过点 P 作与 C 相切的直线 l 交 y 轴于点 M , 过点 M 作直线 l 的垂线交抛物线 C 于 A, B 两点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 如图, 连接 PD 并延长, 交抛物线 C 于点 Q .

① 设直线 AB, OQ (其中 O 为坐标原点) 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值;

② 求 $\frac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle ABD}}$ 的最小值.



第 21 题图

22. (12分) 已知函数 $f(x) = xe^{2x} + 8e^2 \ln x + a$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线过原点, 求 a 的值;

(2) 若在 $y = f(x)$ 的切线中, 存在着过原点的切线, 求 a 的取值范围.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

线
Z S W

 自主选拔在线
微信号：zizzsw

 自主选拔在线
微信号：zizzsw

 自主选拔在线
微信号：zizzsw

 自主选拔在线
微信号：zizzsw