

数 学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 7x < 0\}$, 则 $\complement_U A =$
 - A. $\{x | 0 < x < 7\}$
 - B. $\{x | 0 \leq x \leq 7\}$
 - C. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 7\}$
 - D. $\{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 7\}$
2. 已知复数 z 在复平面内对应的点为 $(3, -4)$, 则 $\frac{z}{2-i} =$
 - A. $2+i$
 - B. $2-i$
 - C. $-2+i$
 - D. $-2-i$
3. 已知向量 $\mathbf{a} = (4, 2)$, $\mathbf{b} = (-3, x)$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 x 的值为
 - A. 6
 - B. -6
 - C. $\frac{3}{2}$
 - D. $-\frac{3}{2}$
4. 已知函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$ 满足 $f(x) = x^3 + 2xf'(2)$, 则 $f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率为
 - A. 4
 - B. -4
 - C. 12
 - D. -12
5. 在正项数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$, 则 $\{a_n\}$
 - A. 为递减数列
 - B. 为递增数列
 - C. 先递减后递增
 - D. 先递增后递减
6. $(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2$ 的展开式中 x^5 的系数为
 - A. 1
 - B. 6
 - C. 12
 - D. 144
7. 某班举办古诗词大赛, 其中一个环节要求默写《咏柳》《送元二使安西》《黄鹤楼送孟浩然之广陵》《绝句》《江畔独步寻花》五首古诗, 并要求《黄鹤楼送孟浩然之广陵》《绝句》默写次序相邻, 则不同的默写次序有
 - A. 36 种
 - B. 48 种
 - C. 72 种
 - D. 96 种

8. 若 $a = \frac{1}{9}$, $b = \ln \frac{10}{9}$, $c = \frac{2}{19}$, 则

- A. $a > c > b$
- B. $b > a > c$
- C. $c > b > a$
- D. $a > b > c$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 下列有关线性回归分析的说法正确的是

- A. 经验回归直线是经过散点图中样本点最多的一条直线
- B. 经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 一定经过点 (\bar{x}, \bar{y})
- C. 残差图中所有散点的纵坐标之和为 0
- D. 两个变量的负相关关系越强,回归模型的 R^2 越接近于 -1

10. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 6x + 1$ 在 $x = \sqrt{2}$ 处取得极值, 则

- A. $a = 1$
- B. $f(x)$ 在 $x = -\sqrt{2}$ 处取得极大值
- C. $f(x)$ 有 3 个不同的零点
- D. $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的值域为 $[-3, 1]$

11. 某小学六年级有 3 个班,六(1)班、六(2)班、六(3)班的学生人数之比为 3:3:4。在某次数学考试中,六(1)班的不及格率为 10%,六(2)班的不及格率为 20%,六(3)班的不及格率为 15%,从该校随机抽取一名六年级学生,记事件 $A =$ “该学生本次数学考试不及格”,事件 $B_i =$ “该学生在六(i)班”($i = 1, 2, 3$), 则

- A. $P(B_i) = 0.3$
- B. $P(A) = 0.15$
- C. A 与 B_i ($i = 1, 2, 3$) 均不相互独立
- D. $\frac{P(B_i|A)}{P(B_j|A)} = \frac{1}{2}$

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{t-1} - \frac{y^2}{t} = 1$ 的一条渐近线方程为 $\sqrt{2}x - y = 0$, 圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上任意一点

P 处的切线 l 交双曲线 C 于 M, N 两点, 则

- A. $t = 2$
- B. 满足 $|MN| = 2\sqrt{2}$ 的直线 l 仅有 2 条
- C. 满足 $OM \perp ON$ 的直线 l 仅有 4 条
- D. $|PM| \cdot |PN|$ 为定值 2

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 且 $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

14. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_7}{S_5} = 2$, 则 $\frac{a_7}{a_5} =$ _____.

15. 某制药公司为了验证一种药物对治疗“抑郁症”是否有效,随机选取了100名抑郁症患者进行试验,并根据试验数据得到下列 2×2 列联表:

	用药	未用药
症状明显减轻	37	33
症状没有减轻	8	22

根据表中数据,计算可得 $\chi^2 =$ _____ (结果精确到0.001),依据小概率值 $\alpha =$ _____ (填临界值表中符合条件的最小值)的独立性检验,可以认为该药物对治疗“抑郁症”是有效的.(本题第一空2分,第二空3分)

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
χ_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

16. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球 O 的体积为 $\frac{256\pi}{3}$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$,且底面 $ABCD$ 为矩形, $PA=4$,则四棱锥 $P-ABCD$ 体积的最大值为_____.

四、解答题:共70分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $4S_n + a_n = 5$.

(I)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II)证明: $1 \leq S_n < \frac{5}{4}$.

18. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ,已知 $b \cos C + c \cos B = 4(a \cos B + b \cos A)$,且

$\cos C = \frac{3\sqrt{7}}{8}$,角 A 为锐角.

(I)求 A ;

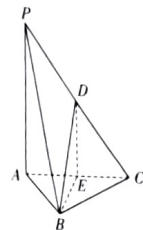
(II)若 $b = 3\sqrt{7} + \sqrt{3}$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $\triangle ABC$ 是正三角形,点 D 在棱 PC 上,且 $BD \perp AC$,点 E 为 AC 的中点.

(I)证明: D 为 PC 的中点;

(II)若 $PC = 2AC = 4$,求二面角 $E-BD-C$ 的余弦值.



20. (12分)

某智力问答节目中,选手要从 A, B 两类题中各随机抽取2个进行作答. A 类题一共有5个,每个题答对得5分,答错得0分, B 类题数量非常多,每个题答对得3分,答错得0分.小明参与该节目,在 A 类题中小明仅能答对其中的4个,每个 B 类题小明能答对的概率都是 $\frac{2}{3}$,且每个 B 类题回答正确与否相互独立.

(I)求小明恰好答对2个题的概率;

(II)求小明答 A 类题和答 B 类题得分的期望之和.

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2}{3}$,点 A, B, D 分别是椭圆 C 的左、右、上顶点,

点 F 是 C 的左焦点,坐标原点 O 到直线 DF 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

(I)求 C 的方程;

(II)过 F 的直线 l 交椭圆 C 于 P, Q 两点,求 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ}$ 的取值范围.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1 (a \in \mathbf{R}), g(x) = f(x) + \ln x - x + 1$.

(I)当 $a = \frac{1}{e}$ 时,求 $f(x)$ 的极小值;

(II)若 $g(x)$ 有2个零点,求 a 的取值范围.