高三第一次备考监测联合考试

数　　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：集合与常用逻辑用语，函数与导数，不等式，三角函数。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2>1\}$，$B=\{x|-5<x<7\}$，则 $A\cap B=$

A. $\mathbf{R}$　　B. $\{x|1<x<7\}$

C. $\{x|-5<x<1\}$　　D. $\{x|-5<x<-1$ 或 $1<x<7\}$

2. 将函数 $f(x)=\sin(5x-\frac{\pi}{4})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度，再将得到的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变），得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$

A. $\sin(\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{20})$　　B. $\sin(10x-\frac{\pi}{20})$

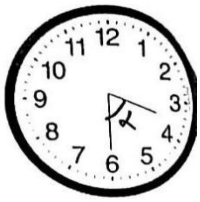
C. $\sin(\frac{5}{2}x+\frac{3\pi}{4})$　　D. $\sin(\frac{5}{2}x+\frac{3\pi}{8})$

3. 已知四边形 $ABCD$ 为梯形，则“$AD=BC$”是“四边形 $ABCD$ 为等腰梯形”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 如图所示的时钟显示的时刻为 3：30，此时时针与分针的夹角为 $\alpha(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2})$. 若一个半径为 2 的扇形的圆心角为 α，则该扇形的弧长为



A. $\frac{5\pi}{6}$　　B. $\frac{11\pi}{12}$

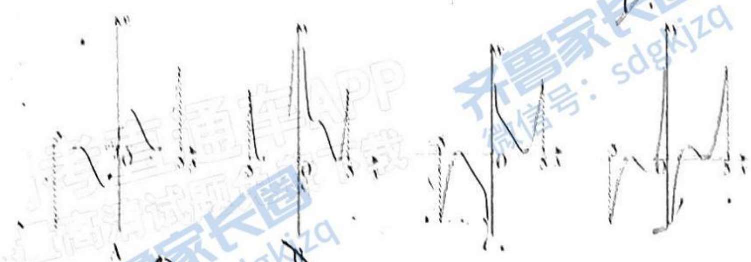
C. $\frac{17\pi}{18}$　　D. π

5. 若直线 $y=x+m$ 与曲线 $y=e^{x-2n}$ 相切，则

A. $m+n$ 为定值　　B. $\frac{1}{2}m+n$ 为定值

C. $m+\frac{1}{2}n$ 为定值　　D. $m+\frac{1}{3}n$ 为定值

6. 函数 $y=(1+\cos x)(x-\frac{1}{x})$ 在 $[-5,0)\cup(0,5]$ 上的部分图象大致为 D



7. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(2+x)$，当 $-2\le x\le 0$ 时，$f(x)$ 单调递增，则 A

T=4

A. $f(\tan\frac{7\pi}{24})<f(2021)<f(\log_2\frac{1}{2})$

B. $f(\tan\frac{7\pi}{24})<f(\log_2\frac{1}{2})<f(2021)$

C. $f(\log_2\frac{1}{2})<f(2021)<f(\tan\frac{7\pi}{24})$

D. $f(\log_2\frac{1}{2})<f(\tan\frac{7\pi}{24})<f(2021)$

8. 根据《民用建筑工程室内环境污染控制标准》，文化娱乐场所室内甲醛浓度 $\le 0.1\ mg/m^3$ 为安全范围。已知某新建文化娱乐场所施工中使用了甲醛喷剂，处于良好的通风环境下时，竣工 1 周后室内甲醛浓度为 $6.25\ mg/m^3$，3 周后室内甲醛浓度为 $1\ mg/m^3$，且室内甲醛浓度 $\rho(t)$（单位：mg/m^3）与竣工后保持良好通风的时间 $t(t\in N^*)$（单位：周）近似满足函数关系式 $\rho(t)=e^{[illegible]}$，则该文化娱乐场所竣工后的甲醛浓度若要达到安全开放标准，至少需要放置的时间为 B

A. 5 周　　B. 6 周　　C. 7 周　　D. 8 周

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题列出的四个选项中，有多个选项是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $\forall x_1,x_2\in R$，$x_1\ne x_2$，$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$，则 $f(x)$ 的解析式可能为

A. $f(x)=x+\ln x$ [illegible]　　B. $f(x)=1+x^3$

C. $f(x)=1-x+2^x$ [illegible]　　D. $f(x)=2x$ [illegible]

10. 下列函数中，最小值为 9 的是

A. $y=(x+\frac{1}{x})(x+\frac{4}{x})$　　B. $y=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4}{\cos^2 x}$

C. $y=\lg x+\frac{4}{\lg x-5}$ [illegible]　　D. $y=\frac{(2x^2+1)(x^2+8)}{(x^2+1)^2}$

11. 已知函数 $f(x)=\cos^2(x-\frac{\pi}{6})-\cos 2x$，则 A，C，D

A. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{7\pi}{6},0)$ 对称

C. $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$

D. $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 4 个零点

的导函数为 $f'(x)$，且 $f(x)+(x^2+x)f'(x)<0$ 恒成立，则

必有

A. $3f(3)<2f(1)$ B. $4f(2)<5f(5)$

C. $3f(1)>5f(5)$ D. $2f(3)>3f(7)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 命题 p：$\forall m\in \mathbf{N}, m^2<m$ 的否定为________.

14. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+x-2\ln x$ 的最小值为 ▲ .

15. 已知 $f(x)$ 不是常数函数，写出一个同时具有下列四个性质的函数 $f(x)$： ▲

①定义域为 $\mathbf{R}$；② $f(x)=f(x+\frac{\pi}{2})$；③ $1+f(2x)=2f^2(x)$；④ $f(\frac{\pi}{4})\neq -1$.

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\leqslant 4,\\ |\log_2(x-4)|, & x>4,\end{cases}$ 关于 x 的方程 $f(x)=t$ 有四个实根 x_1,x_2,x_3,x_4（$x_1<x_2<x_3<x_4$），则 $x_1+x_2+x_3+\frac{1}{4}x_4$ 的最小值为 ▲ .

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知锐角 α 满足 $\tan(\pi+2\alpha)=-\frac{4}{3}$.

(1) 求 $\tan(\alpha+\frac{3\pi}{4})$；

(2) 求 $\sin 2\alpha+3\cos^2\alpha$.

18.（12 分）

已知函数 $f(x)=\log_2(x-a)$ 的定义域为 $[1,9]$，且 $f(x)$ 的图象经过点 $(3,2)$.

(1) 求函数 $g(x)=(\frac{1}{4})^{x-2}-f(x)$ 的最大值；

(2) 求函数 $h(x)=f(x^2)-f(x-1)$ 的值域.

如图,在三棱锥 $A-PBC$ 中,$PA\perp$ 平面 ABC,$AB\perp AC$,AB 与 AC 的长度之和为 6 米,$AB=2AP$,现要给三棱锥 $A-PBC$ 的侧面刷油漆,每平方米需要 0.5 升油漆,油漆价格为 60 元/升.

(1)设 $AB=x$ 米,三棱锥 $A-PBC$ 的侧面共需要油漆 y 升,试写出 y 关于 x 的函数表达式;

(2)刷油漆需要请油漆工来完成,工费按照每平方米 10 元计算,若油漆工工费及油漆费用的总预算为 400 元,试问最后油漆工工费及油漆费用是否有可能会超预算?说明你的理由.

·(12分)

已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$.

(1)若至少存在两个 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$,使得 $f(x_0)=1$,求 ω 的取值范围;

(2)若 $f(x)$ 在 $(\pi,\frac{5\pi}{3})$ 上单调递增,且存在 $m\in(\pi,\frac{5\pi}{3})$,使得 $f(m)<0$,求 ω 的取值集合.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=x^3-2ax(a\neq0)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若曲线 $y=f(x)$ 的一条切线 l 的斜率为 $3-2a$,求 l 与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

(2)设 m,n 为两个不相等的正数,且 $m\ln n-n\ln m=m-n$,证明:$mn>e^4$.

数学参考答案

1. D 【解析】本题考查集合的交集，考查数学运算的核心素养.

因为 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$，所以 $A\cap B=\{x|-5<x<-1$ 或 $1<x<7\}$.

2. C 【解析】本题考查三角函数图象的变换，考查逻辑推理的核心素养.

将函数 $f(x)=\sin(5x-\frac{\pi}{4})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度后，得到的图象的解析式为 $f(x+\frac{\pi}{5})=\sin(5x+\frac{3\pi}{4})$，故 $g(x)=\sin(\frac{5}{2}x+\frac{3\pi}{4})$.

3. A 【解析】本题考查充分必要条件的判定，考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

若 $AD=BC$，则由四边形 $ABCD$ 为梯形，得 $AB/\!/CD$ 且 $AB\neq CD$，所以四边形 $ABCD$ 为等腰梯形.

若四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，则 $AB/\!/CD$ 或 $BC/\!/AD$，而当 $BC/\!/AD$ 时，$AD\neq BC$. 故选 A.

4. A 【解析】本题考查弧度与弧长的关系，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

由图可知，$\alpha=3\times\frac{2\pi}{12}-\frac{2\pi}{12}\times\frac{6}{12}=\frac{5\pi}{12}$，则该扇形的弧长 $l=\alpha r=\frac{5\pi}{6}$.

5. B 【解析】本题考查导数的几何意义，考查数学运算的核心素养.

设直线 $y=x+m$ 与曲线 $y=e^{x-2n}$ 切于点 (x_0, e^{x_0-2n})，因为 $y'=e^{x-2n}$，所以 $e^{x_0-2n}=1$，$x_0=2n$，所以切点为 $(2n,1)$，则 $1=2n+m$，故 $\frac{1}{2}m+n=\frac{1}{2}$.

6. D 【解析】本题考查函数图象的识别，考查读图能力与逻辑推理的核心素养.

设 $f(x)=(1+\cos x)(x-\frac{1}{x})$，则 $x\neq0$，且 $f(-x)=[1+\cos(-x)](-x+\frac{1}{x})=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数，故排除 A 与 B. 因为 $f(1)=f(-1)=f(-\pi)=f(\pi)=0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-5,0)\cup(0,5]$ 上有 4 个零点，故排除 C，从而选 D.

7. A 【解析】本题考查函数的综合，考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，又 $f(-x)=-f(2+x)$，所以 $f(x)=-f(2+x)$，

所以 $f(x)=f(x+4)$，即 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，则 $f(2021)=f(505\times4+1)=f(1)$.

因为 $\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{24}<\frac{\pi}{3}$，所以 $1<\tan\frac{7\pi}{24}<\sqrt{3}$，$f(\log_2\frac{1}{2})=f(-\log_2 2)=f(\log_2 2)$，$0<\log_2 2<1$.

因为 $f(x)$ 为偶函数，且当 $-2\leqslant x\leqslant0$ 时，$f(x)$ 单调递增，所以当 $0\leqslant x\leqslant2$ 时，$f(x)$ 单调递减，

故 $f(\tan\frac{7\pi}{24})<f(2021)<f(\log_2\frac{1}{2})$.

8. B 【解析】本题考查函数的实际应用，考查数学建模与数学运算的核心素养.

由题意可知，$\rho(1)=e^{a+b}=6.25$，$\rho(3)=e^{3a+b}=1$，$\frac{\rho(3)}{\rho(1)}=e^{2a}=\frac{4}{25}$，解得 $e^{a}=\frac{2}{5}$. 设该文化娱乐场所竣工后放置 t_0 周后甲醛浓度达到安全开放标准，则 $\rho(t_0)=e^{at_0+b}=e^{a+b}\cdot e^{a(t_0-1)}=6.25\times(\frac{2}{5})^{t_0-1}\leqslant0.1$，整理得 $62.5\leqslant(\frac{5}{2})^{t_0-1}$，设 $62.5=(\frac{5}{2})^{m-1}$，因为 $(\frac{5}{2})^4<62.5<(\frac{5}{2})^5$，所以 $4<m-1<5$，即 $5<m<6$，则 $t_0-1\geqslant m-1$，即 $t_0\geqslant m$. 故至少需要放置的时间为 6 周.

9. BD 【解析】本题考查基本初等函数的单调性，考查逻辑推理的核心素养.

由题意可知，满足条件的 $f(x)$ 在 R 上单调递增. $f(x)=x+\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f(x)=1-x-2^x$ 在 R 上单调递减，$f(x)=1+x^3$ 与 $f(x)=2x-2^{-x}$ 在 R 上均单调递增.

10. AB 【解析】本题考查基本不等式的应用，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

$y=(x+\frac{1}{x})(x+\frac{4}{x})=5+x^2+\frac{4}{x^2}\geq 5+2\sqrt{4}=9$，当且仅当 $x^2=2$ 时，等号成立.

$y=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4}{\cos^2 x}=(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4}{\cos^2 x})(\sin^2 x+\cos^2 x)=5+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x}\geq 5+2\sqrt{4}=9$，当且仅当 $\tan^2 x=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

因为 $\lg x-5$ 可能小于 0，所以 $y=\lg x+\frac{4}{\lg x-5}$ 的最小值不可能是 9.

$y=\frac{(2x^2+1)(4x^2+8)}{(x^2+1)^2}=\frac{4(2x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+1)^2}\leq 4\times\frac{[\frac{(2x^2+1)+(x^2+2)}{2}]^2}{(x^2+1)^2}=9$.

当且仅当 $x^2=1$ 时，等号成立，则 $y=\frac{(2x^2+1)(4x^2+8)}{(x^2+1)^2}$ 的最大值为 9.

11. ACD 【解析】本题考查三角函数的图象与性质及三角恒等变换，考查数学运算与直观想象的核心素养.

$f(x)=\frac{1+\cos(2x-\frac{\pi}{3})}{2}-\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x)-\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{3}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，A 正确.

令 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，得 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，此即 $f(x)$ 图象的对称轴方程，C 正确.

[illegible]

易知 $f(x)$ 图象的对称中心的纵坐标为 $\frac{1}{2}$，B 错误.

由 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}=0$，得 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}]$，因为 $\sin(-\frac{\pi}{3})=\sin\frac{11\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}<-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以方程 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 4 个不同的实根，即 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 4 个零点，D 正确.

12. ACD 【解析】本题考查导数的综合，考查数学抽象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

设函数 $g(x)=\frac{xf(x)}{x+1}$，$x\geq 0$，则 $g'(x)=\frac{[f(x)+xf'(x)](x+1)-xf(x)}{(x+1)^2}=\frac{f(x)+(x^2+x)f'(x)}{(x+1)^2}<0$.

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，从而 $g(1)>g(2)>g(3)>g(5)>g(7)$，

即 $\frac{f(1)}{2}>\frac{2f(2)}{3}>\frac{3f(3)}{4}>\frac{5f(5)}{6}>\frac{7f(7)}{8}$.

则必有 $3f(3)<2f(1)$，$4f(2)>5f(5)$，$3f(1)>5f(5)$，$6f(3)>7f(7)$.

又 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，则 $g(x)\leq g(0)=0$，从而 $f(x)\leq 0$.

因为 $f(x)+(x^2+x)f'(x)<0$，所以 $f(x)<0$，又 $6f(3)>7f(7)$，所以 $2f(3)>3f(7)$.

【光速解法】取 $f(x)=-1$，满足题意，故选 ACD.

13. $\exists m\in N, m^2\geq m$ 【解析】本题考查命题的否定，考查逻辑推理的核心素养.

全称量词命题的否定是存在量词命题.

14. $-2-2\ln 2$ 【解析】本题考查导数的应用，考查数学运算的核心素养.

$f'(x)=3x(x-2)+\frac{x-2}{x}=(x-2)(3x+\frac{1}{x})(x>0)$.

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增；当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减.

因此 $f(x)$ 的最小值为 $f(2)=-2-2\ln 2$.

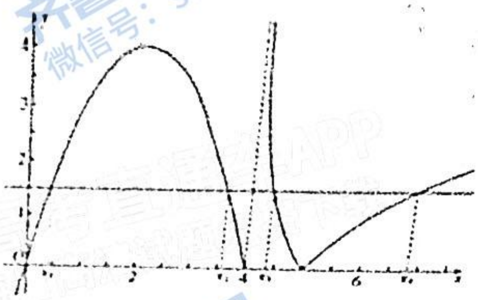
题，考查三角函数的性质与三角恒等变换的应用，考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

由 $1+f(2x)=2f^2(x)$，得 $f(2x)=2f^2(x)-1$，联想到 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$，可推测 $f(x)=\cos\omega x$.

由 $f(x)=f(x+\frac{\pi}{2})$，得 $\frac{\pi}{2}=k\cdot\frac{2\pi}{|\omega|}(k\in N^*)$，则 $|\omega|=4k(k\in N^*)$，又 $f(\frac{\pi}{4})\neq-1$，所以 $f(x)=\cos(4kx)(k\in Z$，k 为偶数，且 $|k|\geq1)$.

16. 10 【解析】本题考查分段函数与基本初等函数的综合，考查逻辑推理、直观想象的核心素养及分类讨论的数学思想.

作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



由图可知 $x_1+x_2=4$，由 $|\log_2(x-4)|=f(2)=4$，得 $x=\frac{65}{16}$ 或 $x=20$，则 $5<x_4<20$.

又因为 $\log_2(x_3-4)+\log_2(x_4-4)=0$，所以 $(x_3-4)\cdot(x_4-4)=1$，所以 $x_3=\frac{1}{x_4-4}+4$.

则 $x_3+\frac{1}{4}x_4=\frac{1}{4}(x_4-4)+\frac{1}{x_4-4}+5$.

且 $x_4-4\in(1,16)$.

所以 $x_3+\frac{1}{4}x_4\geq2\sqrt{\frac{1}{4}}+5=6$，当且仅当 $\frac{1}{4}(x_4-4)=\frac{1}{x_4-4}$，即 $x_4=6$ 时，等号成立.

故 $x_1+x_2+x_3+\frac{1}{4}x_4$ 的最小值为 10.

17. 解：(1)因为 $\tan(\pi+2\alpha)=-\frac{4}{3}$，所以 $\tan2\alpha=-\frac{4}{3}$. ……………… 1分

所以 $\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$. ……………… 2分

解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$ 或 $\tan\alpha=2$. ……………… 3分

又 α 为锐角，所以 $\tan\alpha=2$. ……………… 4分

故 $\tan(\alpha+\frac{3\pi}{4})=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{3}$. ……………… 6分

(2)因为 $\sin2\alpha+3\cos^2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$, ……………… 8分

所以 $\sin2\alpha+3\cos^2\alpha=\frac{2\tan\alpha+3}{\tan^2\alpha+1}=\frac{7}{5}$. ……………… 10分

18. 解：(1)因为 $f(x)$ 的图象经过点 $(3,2)$，所以 $f(3)=\log_2(3+a)=2$，则 $3+a=2^2$，即 $a=1$.

从而 $f(x)=\log_2(x+1)$. ……………… 2分

因为 $y=(\frac{1}{4})^{x-1}$ 的定义域为R，所以 $g(x)$ 的定义域为[1,9]. ……………… 3分

又 $y=(\frac{1}{4})^{x-1}$ 为减函数，$y=-f(x)$ 在[1,9]上单调递减. ……………… 4分

所以 $g(x)$ 在[1,9]上单调递减. ……………… 5分

故 $g(x)_{max}=g(1)=4-1=3$. ……………… 6分

(2)由 $\begin{cases}1\leq x^2\leq9,\\1\leq x-1\leq9,\end{cases}$ ……………… 7分

得 $2\leq x\leq3$，则 $h(x)$ 的定义域为[2,3]. ……………… 8分

$h(x)=f(x^2)-f(x-1)=\log_2(x^2+1)-\log_2x=\log_2\frac{x^2+1}{x}=\log_2(x+\frac{1}{x})$. ……………… 10分

[illegible]

……………………………………………… 12分

以 $f(x)$ 的值域为 $[\log_2\frac{5}{2},\log_2\frac{10}{3}]$.

……………………………………………… 1分

(1)因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AC$.

……………………………………………… 2分

题意得 $AC=6-x$，$AP=\frac{1}{2}x$，$0<x<6$，

$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot PA=\frac{1}{4}x^2$(平方米)，……………………………………………… 3分

$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot PA=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$(平方米)，……………………………………………… 4分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AB=-\frac{1}{2}x^2+3x$(平方米)，……………………………………………… 5分

则 $y=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2+3x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}x(0<x<6)$. ……………………………………………… 7分

(2)设油漆工工费及油漆的费用之和为 z 元，

则 $z=10\times(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle ABC})+60y=-20x^2+180x=-20(x-4.5)^2+405$，………………………… 10分

当 $x=4.5$ 时，z 取得最大值，且最大值为 405. ……………………………………………… 11分

因为 $405>400$，所以最后有可能会超预算. ……………………………………………… 12分

20. 解：(1)由题意知，$f(x)$ 的图象在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上至少有两个最高点. ……………………………………………… 1分

因为 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\omega>0$，所以 $\omega x_0\in(0,\frac{\omega\pi}{2})$，……………………………………………… 2分

因此 $\frac{\omega\pi}{2}>\frac{5\pi}{2}$. ……………………………………………… 4分

解得 $\omega>5$. 故 ω 的取值范围为 $(5,+\infty)$. ……………………………………………… 5分

(2)依题意得 $\frac{5\pi}{3}-\pi\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}$，又 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$. ……………………………………………… 7分

当 $m\in(\pi,\frac{5\pi}{3})$ 时，$\omega m\in(\omega\pi,\frac{5\omega\pi}{3})$，又 $\exists m\in(\pi,\frac{5\pi}{3})$，$f(m)<0$，所以 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\omega\pi<2k\pi(k\in Z)$，…… 9分

即 $2k-\frac{1}{2}\leqslant\omega<2k(k\in Z)$. 当 $k\leqslant0$ 或 $k\geqslant2$ 时，$[2k-\frac{1}{2},2k)\cap(0,\frac{3}{2}]=\varnothing$； ……………………………… 10分

当 $k=1$ 时，$\frac{3}{2}\leqslant\omega<2$，又 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$，则 $\omega=\frac{3}{2}$.

故 ω 的取值集合为 $\{\frac{3}{2}\}$. ……………………………………………… 12分

21. 解：(1) $f'(x)=3x^2-2a$. ……………………………………………… 1分

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 R 上单调递增. ……………………………………………… 2分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x<-\frac{\sqrt{6a}}{3}$ 或 $x>\frac{\sqrt{6a}}{3}$；令 $f'(x)<0$，得 $-\frac{\sqrt{6a}}{3}<x<\frac{\sqrt{6a}}{3}$. ………… 3分

所以当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\frac{\sqrt{6a}}{3},\frac{\sqrt{6a}}{3})$ 上单调递减，在 $(-\infty,-\frac{\sqrt{6a}}{3})$，$(\frac{\sqrt{6a}}{3},+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………… 4分

(2)由 $f'(x)=3x^2-2a=3-2a$，得 $x=\pm1$，则满足条件的切线有两条，且切点的横坐标为 ±1. ……… 5分

当切点的横坐标为 1 时，l 的方程为 $y-(1-2a)=(3-2a)(x-1)$，即 $y=(3-2a)x-2$，……………… 6分

将 $y=(3-2a)x-2$ 代入 $y=x^3-2ax$，得 $(3-2a)x-2=x^3-2ax$，即 $x^3-3x+2=0$，……………… 7分

则 $x^3-x+2-2x=x(x-1)(x+1)+2(1-x)=0$，即 $(x-1)^2(x+2)=0$，

解得 $x=1$ 或 $x=-2$ …

故 l 与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标为 $(1,1-2a)$ 和 $(-2,4a-8)$. ………………………… 9 分

当切点的横坐标为 -1 时，l 的方程为 $y-(-1+2a)=(3-2a)(x+1)$，即 $y=(3-2a)x+2$. ……… 10 分

将 $y=(3-2a)x+2$ 代入 $y=x^3-2ax$，得 $(3-2a)x+2=x^3-2ax$，

即 $x^3-3x-2=0$，$(x+1)^2(x-2)=0$，解得 $x=2$ 或 $x=-1$. ………………………… 11 分

故 l 与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标为 $(2,8-4a)$ 和 $(-1,2a-1)$. ………………………… 12 分

22.（1）解：$f(x)$ 的定义域为 R，$f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}$. ………………………… 1 分

当 $x\in(-\infty,2)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$. ………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,2)$，单调递减区间为 $(2,+\infty)$. ………………………… 3 分

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值，且极大值为 $\dfrac{1}{e^2}$，无极小值. ………………………… 4 分

（2）证明：$m\ln n-n\ln m=m-n\Leftrightarrow m(\ln n-1)=n(\ln m-1)\Leftrightarrow\dfrac{\ln n-1}{n}=\dfrac{\ln m-1}{m}\Leftrightarrow\dfrac{\ln n-1}{e^{\ln n}}=\dfrac{\ln m-1}{e^{\ln m}}$，

即 $f(\ln m)=f(\ln n)$，$\ln m\neq\ln n$. ………………………… 5 分

不妨设 $x_1=\ln m$，$x_2=\ln n$，$x_1<x_2$，

由（1）可知 $x_2\in(2,+\infty)$，$f(x_1)=f(x_2)>0$，$x_1\in(1,2)$. ………………………… 6 分

当 $x_2\geq3$ 时，$x_1+x_2>4$，$mn>e^4$. ………………………… 7 分

当 $2<x_2<3$ 时，$1<4-x_2<2$，$f(x_2)-f(4-x_2)=\dfrac{x_2-1}{e^{x_2}}-\dfrac{4-x_2-1}{e^{4-x_2}}=\dfrac{(x_2-1)e^{4-x_2}-(3-x_2)e^{x_2}}{e^4}$. ……

………………………… 8 分

设 $h(x)=(x-1)e^{4-x}-(3-x)e^x$，$x\in(2,3)$，

则 $h'(x)=(2-x)e^{4-x}-(2-x)e^x=(2-x)(e^{4-x}-e^x)$. ………………………… 9 分

因为 $x\in(2,3)$，$4-x<x$，所以 $h'(x)>0$，则 $h(x)$ 在区间 $(2,3)$ 上单调递增，

$h(x)>(2-1)e^{4-2}-(3-2)e^2=0$， ………………………… 10 分

所以 $f(x_2)-f(4-x_2)=f(x_1)-f(4-x_2)>0$，$f(x_1)>f(4-x_2)$. ………………………… 11 分

又因为 x_1，$4-x_2\in(1,2)$，所以 $x_1>4-x_2$，

即 $x_1+x_2>4$，故 $mn>e^4$. ………………………… 12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。