乌鲁木齐地区 2023 年高三年级第二次质量监测

文科数学参考答案及评分标准

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1~5．BDDCA　6~10．AACCD　11~12．DB

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 4　　14. $y=2x$　　15. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　16. $\frac{6\sqrt{2}-3}{7}$

三、解答题

17.

⑴易知 $P(B)=\frac{11}{8+52+29+11}=0.11$

$P(AB)=\frac{11-3}{100}=0.08$；　…4 分

⑵列 2×2 列联表得

	参加校外	不参加校外	合计
成绩优秀或良好	10	30	40
成绩不为优秀或良好	20	40	60
合计	30	70	100

$k=K^2=\frac{100\times(600-400)^2}{30\times 70\times 40\times 60}=\frac{50}{63}\approx 0.794<2.706$

∴不能在犯错误的概率不超过为 0.1 的前提下认为学生成绩优秀或良好与校外补习有关．　…12 分

18.

⑴由题意知，$2a_2+1=a_3+1$，又 $a_1=1$，得 $q^2=2q$，∴ $q=2$，故 $a_n=2^{n-1}$；　…6 分

⑵由⑴得 $b_n=\log_2 2^n=n$，

∴ $T_n=\frac{1}{b_1\cdot b_2}+\frac{1}{b_2\cdot b_3}+\cdots+\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$．　…12 分

19.

⑴证明：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp A_1F$，又 $AB=AC$，F 为 B_1C_1 中点，

∴ $A_1F\perp B_1C_1$　又 $CC_1\cap B_1C_1=C_1$，$CC_1\subset$ 平面 B_1C_1CB，$B_1C_1\subset$ 平面 B_1C_1CB

∴ $A_1F\perp$ 平面 B_1C_1CB，$B_1E\subset$ 平面 B_1C_1CB，∴ $A_1F\perp B_1E$；　…6 分

⑵由已知 $d_{B_1-A_1EF}=d_{C_1-A_1EF}$，设 $C_1E=a$，则由 $V_{A_1-C_1EF}=V_{C_1-A_1EF}$

即 $\frac{1}{3}A_1F\cdot S_{\Delta C_1EF}=\frac{1}{3}d_{C_1-A_1EF}\cdot S_{\Delta A_1EF}$，∴ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times a=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{3}{4}+a^2}$

得 $a=1$，∴ $CE:EC_1=1:1$．　…12 分

20.

(1)易知 $\frac{p}{2}=1$，即 $p=2$，∴抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$；…4 分

(2)可设 l_{BM}：$x=my+n$ 与 $y^2=4x$ 联立得：$y^2-4my-4n=0$

设 $B(x_1,y_1),M(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4m, y_1\cdot y_2=-4n$，

由 $k_{BP}=\frac{4(y_1-2)}{y_1^2+4}$

∴ $l_{BP}: y-2=\frac{4(y_1-2)}{y_1^2+4}(x+1)$ 与 $y^2=4x$ 联立得：$y^2(y_1-2)-y(y_1^2+4)+2y_1(y_1+2)=0$

∴ $y_A=\frac{2(y_1+2)}{y_1-2}$，即：$A\left(\frac{(y_1+2)^2}{(y_1-2)^2},\frac{2(y_1+2)}{y_1-2}\right)$，由 $k_{MA}=\frac{4}{y_M+y_A}=1$，∴ $y_M+y_A=4$，

即 $y_2+\frac{2(y_1+2)}{y_1-2}=\frac{y_1y_2-2y_2+2y_1+4}{y_1-2}=4$，∴ $y_1y_2-2(y_1+y_2)+12=0$，即 $2m+n-3=0$

又 $l_{BM}: my-x+n=0$，∴ $l_{BM}: my-x+3-2m=0$，∴ l_{BM} 过定点 $(3,2)$．…12 分

21.

(1) $f'(x)=\frac{a(1-x)}{e^x}$，

当 $a>0$ 时，∴ $x, f'(x), f(x)$ 的关系如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

∴ $x=1$ 时，$f(x)$ 的极大值为 $\frac{a}{e}$，$f(x)$ 无极小值.

当 $a<0$ 时，∴ $x, f'(x), f(x)$ 的关系如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

∴ $x=1$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $\frac{a}{e}$，$f(x)$ 无极大值；…4 分

⑵由题得，$g(x)=\dfrac{ax}{e^x}+x-\ln x-3$，$g'(x)=\dfrac{(x-1)(e^x-ax)}{x\cdot e^x}$.

令 $\varphi(x)=e^x-ax$，可知要使 $g(x)$ 有四个零点，则 $g'(x)$ 至少应有三个零点，

$\therefore \varphi(x)$ 至少有两个零点，$\varphi'(x)=e^x-a$，其中 $x>0$，

①当 $a\le 1$ 时，$\varphi'(x)>0$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)$ 至多只有一个零点不合题意；

②当 $a>1$ 时，$x\in(0,\ln a)$，$\varphi'(x)<0$，$x\in(\ln a,+\infty)$，$\varphi'(x)>0$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 为减函数，$(\ln a,+\infty)$ 为增函数，

要使 $\varphi(x)$ 有两个零点，$\varphi(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a=a(1-\ln a)<0$，解得 $a>e$

此时 $\varphi(1)=e-a<0$，$0<\dfrac{e^{-a}}{a}<1$，$\therefore \varphi\left(\dfrac{e^{-a}}{a}\right)=e^{\frac{e^{-a}}{a}}-a\cdot\dfrac{e^{-a}}{a}=e^{\frac{e^{-a}}{a}}-e^{-a}>0$

$\therefore \varphi(x)$ 在 $\left(\dfrac{e^{-a}}{a},1\right)$ 存在一个零点 x_1，且 $e^{x_1}-ax_1=0$

下面证明当 $x>1$ 时，$e^x>x^2>x$，当 $x>1$ 时，$x^2-x=x(x-1)>0$

令 $m(x)=e^x-x^2, m'(x)=e^x-2x$，令 $p(x)=e^x-2x$，$p'(x)=e^x-2$

当 $x>1$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，$p(x)>p(1)=e-2>0$

$\therefore m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，$m(x)>m(1)=e-1>0$，即 $e^x>x^2$

$\because a>e>1$，$\therefore \varphi(a)=e^a-a^2>0$，$\therefore \varphi(x)$ 在 $(1,a)$ 存在一个零点 x_2，且 $e^{x_2}-ax_2=0$

$\therefore x\in(0,x_1)\cup(1,x_2)$ 时，$g'(x)<0$，$x\in(x_1,1)\cup(x_2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 和 $(1,x_2)$ 上递减，在 $(x_1,1),(x_2,+\infty)$ 上递增，

又 $\because g\left(\dfrac{e^{-a}}{a}\right)=\dfrac{a\cdot\dfrac{e^{-a}}{a}}{e^{\frac{e^{-a}}{a}}}+\dfrac{1}{a}\cdot e^{-a}-\ln\dfrac{e^{-a}}{a}-3>a+\ln a-3>0$，

$$g\left(e^{a+2}\right)=\frac{a\cdot e^{a+2}}{e^{e^{a+2}}}+e^{a+2}-\ln e^{a+2}-3>e^{a+2}-(a+2)-3>(a+2)^2-a-5=a^2+3a-1>0$$

$\therefore$ 只需 $\begin{cases} g(x_1)<0 \\ g(1)>0 \\ g(x_2)<0 \end{cases}$ ， $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{e^{-a}}{a},x_1\right),(x_1,1),(1,x_2),\left(x_2,e^{a+2}\right)$ 各有一个零点

其中 $g(1)=\dfrac{a}{e}-2>0$，$\therefore a>2e$

$g(x_1)=\dfrac{ax_1}{e^{x_1}}+x_1-\ln x_1-3=1+x_1-\ln\dfrac{e^{x_1}}{a}-3=\ln a-2<0$，解得 $a<e^2$ （$g(x_2)<0$ 同理）

综上所述 $2e<a<e^2$. …12 分

22.

(1)由已知 $C:\rho=2\sin\theta$，$\therefore \rho^2=2\rho\sin\theta$，即 $x^2+y^2=2y$

由 $\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t \\ y=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ 得 $l:y-2=\sqrt{3}(x-1)$，即 $\sqrt{3}x-y+2-\sqrt{3}=0$； …5 分

(2)将直线参数方程 $\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t \\ y=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ 代入到 $x^2+y^2=2y$ 中得

$1+t+\dfrac{1}{4}t^2+4+2\sqrt{3}t+\dfrac{3}{4}t^2=4+\sqrt{3}t$，即 $t^2+\left(\sqrt{3}+1\right)t+1=0$

$\therefore t_1+t_2=-\left(\sqrt{3}+1\right)$，则由 t 的几何意义可知，$|PQ|=-\dfrac{t_1+t_2}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. …10 分

23.

(1)$\because a+b+c=1$，$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}=3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$

$\geq 3+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+2\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c}}+2\sqrt{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}=9$ $\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 9$； …5 分

(2)$\because a,b,c\in\mathbf{R}^+$，$\therefore a+b\geq 2\sqrt{ab},a+c\geq 2\sqrt{ac},b+c\geq 2\sqrt{bc}$

$$\therefore \frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{b+a}{\sqrt{c}}\geq\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{2\sqrt{ac}}{\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}$$

$$=\frac{2\sqrt{abc}}{a}+\frac{2\sqrt{abc}}{b}+\frac{2\sqrt{abc}}{c}=2\sqrt{abc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 2\sqrt{abc}\times 9=18\sqrt{abc}$$

$\therefore \dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{a+c}{\sqrt{b}}+\dfrac{b+a}{\sqrt{c}}\geq 18\sqrt{abc}$. …10 分