2023年锦州市普通高中高三质量检测

数学(参考答案及评分标准)

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

BDCC　　DBAD

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. AD　　10. BC　　11. AB　　12. ABC

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. $x=2$(或 $3x-4y+10=0$)

注:写一条直线方程即可,如果写两个方程,都正确得5分,有错误的得0分。

14. 1

15. 3

16. $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$(第一空2分,第二空3分)

四、解答题:本题共6小题,共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分10分)

解:(1)因为 $a_n+b_n=2n-1$,所以 $(a_{n+1}+b_{n+1})-(a_n+b_n)=2$,

所以数列 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为1,公差为2的等差数列,即 $a_n+b_n=2n-1$,

所以其前 n 项和 $A_n+B_n=n^2$ ……(3分)

又因为 $A_n-B_n=n$ 所以 $A_n=\frac{n(n+1)}{2}$, $B_n=\frac{n(n-1)}{2}$ ……(5分)

(2)当 $n\geqslant 2$ 时,$b_n=B_n-B_{n-1}=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=n-1$ ……(7分)

$b_1=B_1=0$ 也适合,所以 $b_n=n-1$ ……(8分)

所以 $c_n=2^{b_n}+\frac{1}{2A_n}=2^{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}=2^{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ……(9分)

所以 $S_n=(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2^n-\frac{1}{n+1}$ ……(10分)

18. (本题满分12分)

解:(1)200名有预订的游客中,青年游客人数为 $200\times(38\%+22\%)=120$,

200名不预订的游客中,青年游客人数为 $400\times\frac{3}{16}=75$,

可知 2×2 列联表如下

	预订旅游	不预订旅游	合计
青年	120	75	195
非青年	80	125	205
合计	200	200	400

……(3分)

$K^2=\dfrac{400(120\times125-80\times75)^2}{200\times200\times195\times205}\approx20.263>10.828$ ……(6分)

所以能在犯错误概率不超过0.001的前提下，认为旅游预订与是否青年有关. ……(8分)

(2)按分层抽样，从预定游客中选取5人，

其中青年游客的人数为$5\times\dfrac{120}{200}=3$人，其他游客2人，……(9分)

所以从5人中任取3人，其中至少有2人是青年人的概率为

$P=\dfrac{C_3^2C_2^1+C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{7}{10}$ ……(12分)

19. (本题满分12分)

解：(1)(法一)因为$5(a+c)\sin B=12c\sin A$，所以由正弦定理，得$5(a+c)b=12ac$

又因为$a=c$，所以$10ab=12ac$，即$b=\dfrac{6}{5}c$. ……(3分)

由余弦定理知：

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\left(\frac{6}{5}c\right)^2+c^2-c^2}{2\times\frac{6}{5}c\times c}=\dfrac{3}{5}$ ……(6分)

(法二)因为$a=c$所以$A=C$

又$5(a+c)\sin B=12c\sin A$

所以$10c\sin B=12c\sin A$，即$5\sin B=6\sin A$ ……(3分)

所以$5\sin(\pi-2A)=6\sin A$即$5\sin2A=6\sin A$所以$10\sin A\cos A=6\sin A$

因为$\sin A\neq0$，所以$\cos A=\dfrac{3}{5}$. ……(6分)

(2)不存在以B为直角顶点的直角三角形 ……(7分)

理由如下：

因为$5(a+c)\sin B=12c\sin A$，

由正弦定理，得$5(\sin A+\sin C)\sin B=12\sin A\sin C$

若$B=\dfrac{\pi}{2}$，则$\sin B=1$，且$\sin C=\cos A$，

所以$\sin A+\cos A=\dfrac{12}{5}\sin A\cos A=\dfrac{6}{5}\sin2A$ ……(9分)

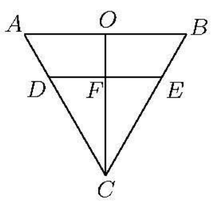
将上式两边平方得：$1+\sin2A=\dfrac{36}{25}\sin^2 2A$

所以$(9\sin2A+5)(4\sin2A-5)=0$ ……(11分)

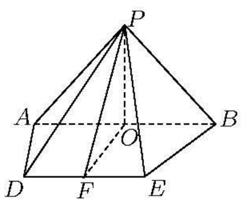
因为$0<\sin2A<1$，所以$9\sin2A+5>0$，且$4\sin2A-5<0$，

故不存在满足条件的三角形. ……(12分)

20. (本题满分12分)



图一



图二

解：(1) 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，$AD=BE=\frac{1}{3}AC$，$DE /\!/ AB$，

CO 为 AB 边上的高线，所以 $DE\perp OF$，$DE\perp PF$，又 $OF\cap PF=F$，

所以 $DE\perp$ 平面 FOP ……………………………………………………………………(2 分)

因为 $OP\subset$ 平面 FOP，所以 $DE\perp OP$ ……………………………………………………(3 分)

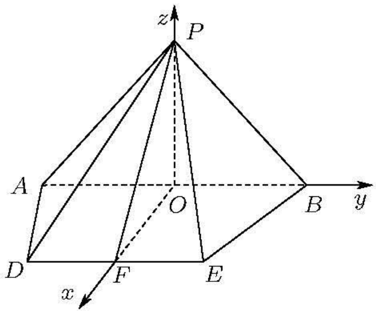
在 $\triangle FOP$ 中，$OF=\sqrt{3}$，$OP=3$，$PF=2\sqrt{3}$，所以 $OF^2+OP^2=PF^2$，

所以 $OP\perp OF$，……………………………………………………………………………(4 分)

而 $DE\subset$ 平面 $ABED$，$OF\subset$ 平面 $ABED$，$OF\cap DE=F$，

所以 $OP\perp$ 平面 $ABED$……………………………………………………………………(6 分)

(2) 分别以 $\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$ 方向为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系，



则 $P(0,0,3)$，$B(0,3,0)$，$E(\sqrt{3},2,0)$，$F(\sqrt{3},0,0)$，

则 $\overrightarrow{PE}=(\sqrt{3},2,-3)$，$\overrightarrow{BE}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{EF}=(0,-2,0)$ ……………………………(7 分)

设平面 BPE 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，平面 PEF 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PE}=\sqrt{3}x_1+2y_1-3z_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BE}=\sqrt{3}x_1-y_1=0\end{cases}$，且 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PE}=\sqrt{3}x_2+2y_2-3z_2=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EF}=-2y_2=0\end{cases}$，

解得平面 BPE 的一个法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$，……………………………………(8 分)

平面 PEF 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3},0,1)$，……………………………………………(9 分)

设二面角 $B-PE-F$ 大小为 θ，则 $|\cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ……………………(11 分)

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ……………………………………………………(12 分)

21．(本题满分 12 分)

解：(1) 设 $|F_1F_2|=2c(c>0)$，因为双曲线 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，

设 $a=\sqrt{3}t$，$c=2t$，$t>0$，

所以 $F_1(-2t,0)$，$F_2(2t,0)$，$\overrightarrow{PF_1}=(-2t-3,-1)$，$\overrightarrow{PF_2}=(2t-3,-1)$，

所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-2t-3)(2t-3)+1=6$，解得 $t=1$ 或 -1(舍)，

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ ……………………………………………………(4 分)

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$l:y-1=k(x-3)$ 即 $y=kx+1-3k$，$k\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由 $\begin{cases}y=kx+1-3k\\x^2-3y^2=3\end{cases}$，可得 $(1-3k^2)x^2-6k(1-3k)x-3(2-6k+9k^2)=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{6k(1-3k)}{1-3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-3(2-6k+9k^2)}{1-3k^2}$ ……………………（6分）

设 $M(x_0,y_0)$，根据题意，$x_1<x_0<x_2<3$，

又由 $\dfrac{|AP|}{|AM|}=\dfrac{|BP|}{|BM|}$，可得 $\dfrac{3-x_1}{x_0-x_1}=\dfrac{3-x_2}{x_2-x_0}$ ……………………（8分）

整理得：$6x_0+2x_1x_2=(x_0+3)(x_1+x_2)$，

即 $6x_0-\dfrac{6(2-6k+9k^2)}{1-3k^2}=(x_0+3)\dfrac{6k(1-3k)}{1-3k^2}$，

化简得 $x_0-2=kx_0-3k$ ……………………（10分）

又 $y_0=kx_0+1-3k$，消去 k，得 $x_0-y_0-1=0$，

所以点 M 在定直线 $x-y-1=0$ 上． ……………………（12分）

22．（本题满分12分）

(1) 证明：$g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的增函数，

所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$ ……………………（2分）

(2) 解：$h'(x)=e^x-k$，

当 $k\leqslant 0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 为 R 上的增函数，所以存在 $x_0<0$，$h(x_0)<h(0)=0$，

不符合题意； ……………………（3分）

当 $k>0$ 时，由 $h'(x)=e^x-k=0$，得 $x=\ln k$，

$x\in(-\infty,\ln k)$ 时 $h'(x)<0$，$h(x)$ 是减函数，$x\in(\ln k,+\infty)$ 时 $h'(x)>0$，$h(x)$ 是增函数，

所以 $h(x)\geqslant h(\ln k)=k-k\ln k-1$ ……………………（4分）

所以只需 $k-k\ln k-1\geqslant 0$ ……①，

设 $r(k)=k-k\ln k-1$，则 $r'(k)=-\ln k$，

当 $0<k<1$ 时 $r'(k)>0$，$r(k)$ 为增函数，当 $k>1$ 时 $r'(k)<0$，$r(k)$ 为减函数，

则 $r(k)\leqslant r(1)=0$， ……………………（5分）

所以当且仅当 $k=1$ 时①式成立；

综上，$k=1$ ……………………（6分）

评卷说明：1．能结合图形说明 $k=1$ 给2分，否则1分。

2．其他方法参考评分标准给分。

(3) 证明：$f(x)=e^{ax-1}\cdot\cos x$，$f'(x)=e^{ax-1}\cos x(a-\tan x)$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

因为 $y=a-\tan x$ 是 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的减函数，由正切函数的性质及 $a>0$ 可知，

在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内，存在唯一实数 x_0，使得 $\tan x_0=a$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，当 $x\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，

所以 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点， ……………………（8分）

由(1)可知，当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$x\geqslant\sin x$，由(2)可知 $e^x\geqslant x+1$，

所以 $f(x_0)=\mathrm{e}^{ax_0-1}\cos x_0\geqslant ax_0\cdot\cos x_0\geqslant a\sin x_0\cos x_0=a\dfrac{\tan x_0}{1+\tan^2 x_0}=\dfrac{a^2}{1+a^2}$ ……………………(10 分)

下面证明 $\dfrac{a^2}{1+a^2}>\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}$,

令 $t=-\dfrac{1}{a}<0$,即证 $\dfrac{1}{1+t^2}>\mathrm{e}^t\Leftrightarrow(1+t^2)\mathrm{e}^t-1<0$……②,

设 $\varphi(t)=(1+t^2)\mathrm{e}^t-1$,则 $\varphi'(t)=\mathrm{e}^t(1+t)^2\geqslant 0$,

所以 $\varphi(t)$ 是 $(-\infty,0)$ 上的增函数,

所以 $t<0$ 时,$\varphi(t)<\varphi(0)=0$,②式成立,命题得证. ……………………………………………………(12 分)