绝密★考试结束前

浙江省名校新高考研究联盟（Z20联盟）2021届高三第二次联考数学试题卷

选择题部分

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|\log_2 x>1\}, B=\{x||x-1|<2\}$，则 $A\cup B=$（ ▲ ）

A. $(2,3)$　　B. $(-1,3)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(-1,+\infty)$

2. 双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线方程为（ ▲ ）

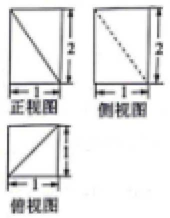
A. $y=\pm 2x$　　B. $y=\pm 4x$　　C. $y=\pm\frac{1}{2}x$　　D. $y=\pm\frac{1}{4}x$

3. 已知 i 是虚数单位，若 $z=1-\mathrm{i}$，则 $(1+z)\cdot\bar{z}$ 的模为（ ▲ ）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

4. 设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}3x-y-2\geqslant 0\\ x+y-6\leqslant 0\\ y-1\geqslant 0\end{cases}$，则目标函数 $z=2x-y$ 的最大值为（ ▲ ）

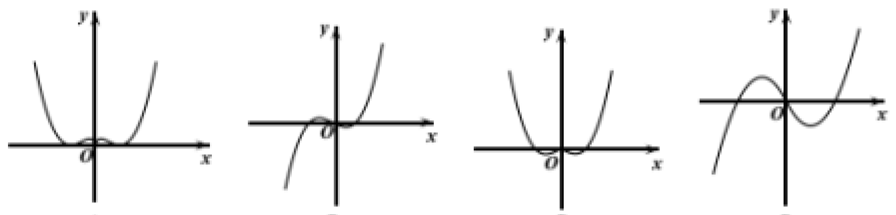
A. 0　　B. 1　　C. 9　　D. 10



5. 某几何体的三视图如图所示(单位：cm)，则该几何体的体积是（ ▲ ）(单位：cm^3)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. 1　　D. 2

6. 函数 $(x)=(x^2-|x|)\ln|x|$ 的图象可能是（ ▲ ）



A　　B　　C　　D

7. 设 α,β 为两个不同的平面，l,m 为两条不同的直线，且 $m\perp\alpha$，$l//\beta$，则“$l//m$”是“$\alpha\perp\beta$”的（ ▲ ）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

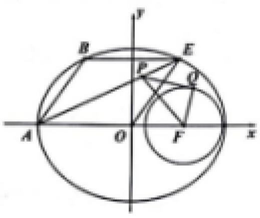
8. 函数 $f(x)=x^2(\mathrm{e}^{x+1}-1)$（e 为自然对数的底数），则下列说法正确的是（ ▲ ）

A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上只有一个极值点　　B. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上没有极值点

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值点　　D. $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值点

9. 已知点 A 为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点，$F(c,0)$ 为椭圆的右焦点，B、E 在椭圆上，四边形 $OABE$ 为平行四边形(O 为坐标原点)，过直线 AE 上一点 P 作圆 $(x-c)^2+y^2=\frac{b^2}{4}$ 的切线 PQ，Q 为切点，若△PQF 面积的最小值大于 $\frac{b^2}{8}$，则椭圆 C 的离心率的取值范围是（ ▲ ）

A. $\left(0,\frac{\sqrt{10}-2}{3}\right)$　B. $\left(\frac{\sqrt{10}-2}{3},1\right)$　C. $\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{3}\right)$　D. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{3},-1\right)$



10. 已知非空集合 $A\subseteq\mathbf{R}$，设集合 $S=\{x+y|x\in A,\ y\in A$ 且 $x\neq y\}$，　$S=\{x-y|x\in A,\ y\in A$ 且 $x>y\}$. 分别用 $|A|$、$|S|$、$|T|$ 表示集合 A、S、T 中元素的个数，则下列说法不正确的是（ ▲ ）

A. 若 $|A|=4$，则 $|S|+|T|\geqslant 8$　　B. 若 $|A|=4$，则 $|S|+|T|\leqslant 12$

C. 若 $|A|=5$，则 $|S|+|T|$ 可能为18　　D. 若 $|A|=5$，则 $|S|+|T|$ 不可能为19

非选择题部分

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.

11. 函数 $f(x)=\sin x+\cos x$，$x\in\mathbf{R}$ 的最小正周期是__▲__，单调递增区间为__▲__.

12. 二项式 $\left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^7$ 展开式中，各项系数和为__▲__，含 x 项的系数为__▲__.

13. 圆锥被一平面所截得到一个圆台，若圆台的上底面半径为2cm，下底面半径为3cm，圆台母线长为4cm，则该圆锥的侧面积为__▲__cm^2.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0$，前 n 项和为 S_n，若 $a_3=3$，且对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_{2k}^2=2^{a_{2k-1}+1}$，$a_{2k+1}=2\log_2 a_{2k}+1$，则 $a_1=$__▲__，$S_{20}=$__▲__.

15. 若a，b是正实数，且$a+b=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}$的最小值为____▲____.

16. 袋子里装有编号分别为“$2,3,3,4,4,5$”的6个大小、质量相同的小球，小明从袋子中一次任取2个球，若每个球被取到的机会均等，记取出的2个小球编号之和为X，编号之差的绝对值为Y，记$\xi=X+Y$，则$P(\xi=6)=$____▲____；$E(\xi)=$____▲____.

17. 若平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{c})=0,|\vec{c}|=1,|\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}|=2$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值为____▲____.

三、解答题：本大题共5小题，共74分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. (本题满分14分)

在锐角$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，向量$\vec{m}=(\cos C,\cos A)$与$\vec{n}=(2b-c,a)$平行.

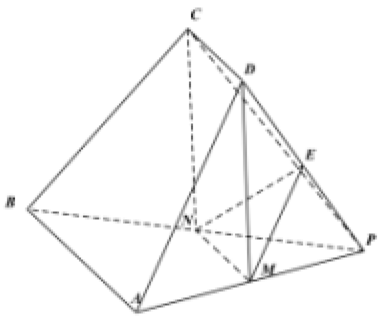
（Ⅰ）求角A的大小；（Ⅱ）求$\frac{b}{c}$的取值范围.

19. (本题满分15分)

在四棱锥$P-ABCD$中，$AB//CD$，$AD=2$，$\angle DAB=60°$，$\triangle APB$为等腰直角三角形，$PA=PB=2\sqrt{2}$，过CD的平面分别交线段PA，PB于M,N，E在线段DP上（M,N,E不同于端点）.

（Ⅰ）求证：$CD//$平面MNE；

（Ⅱ）若E为DP的中点，且$DM\perp$平面APB，求直线PA与平面MNE所成角的正弦值.



20.（本题满分 15 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=1$，当$n\geqslant 2(n\in\mathbf{N}^*)$时，

$(n-1)S_n-(n+1)S_{n-1}=\frac{1}{3}(n^3-n)$.

（Ⅰ）证明：数列$\left\{\frac{S_n}{n(n+1)}\right\}$为等差数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

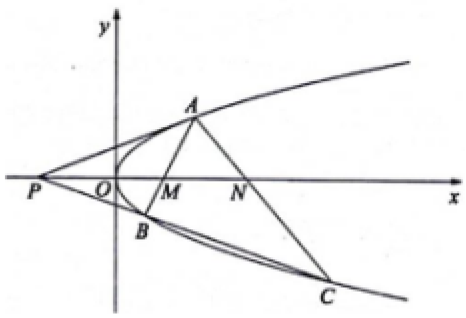
（Ⅱ）记数列$b_n=\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}(n\in\mathbf{N}^*)$，记$T_n$为$\{b_n\}$前$n$项的积，证明：$T_n>n+1$.

21.（本题满分 15 分）

如图，已知抛物线$y^2=x$，过点$M(1,0)$作斜率为$k(k>0)$的直线l交抛物线于A，B两点，其中点A在第一象限，过点A作抛物线的切线与x轴相交于点P，直线PB交抛物线另一点为C，线段AC交x轴于点N．记$\triangle APC$，$\triangle AMN$的面积分别为S_1,S_2.

（Ⅰ）若$k=1$，求$|AB|$；

（Ⅱ）求$\frac{S_1}{S_2}$的最小值.



22.（本题满分 15 分）

已知函数$h(x)=(x^2-2x)\ln x-a(x^2+2x)(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若a为整数，且$h(x)\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，求a的最大值；

（Ⅱ）若函数$H(x)=h(x)+2x-\frac{1}{2}x^2$的两个极值点分别为$x_1,x_2$，且$x_1<x_2$，证明：$x_2>(2a+1)x_1$.

浙江省名校新高考研究联盟（Z20 联盟）2021 届高三第二次联考

数学参考答案

一、选择题

1-5 ： D C D C B　　6-10 ： A A C B D

二、填空题

11. 2π；$\left[2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right],k\in Z$　12. 1；14　13. 36π　14. 1；2146

15. $3+2\sqrt{2}$；　16. $\frac{1}{5}$；$\frac{124}{15}$　17. $\frac{1}{3}$.

三、解答题

18.（Ⅰ）$\because \vec{m}//\vec{n}$，$\therefore a\cos C-(2b-c)\cos A=0$.

由正弦定理得 $\sin A\cos C-2\sin B\cdot\cos A+\sin C\cdot\cos A=0$,　……3 分
即 $\sin(A+C)-2\sin B\cdot\cos A=0$, 即 $\sin B-2\sin B\cdot\cos A=0$.

由 $\sin B\neq 0$，得 $\cos A=\frac{1}{2}$.又 $0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.　……6 分

（Ⅱ）由 ΔABC 为锐角三角形，$\begin{cases}C\in(0,\frac{\pi}{2})\\ B=\frac{2\pi}{3}-C\in(0,\frac{\pi}{2})\end{cases}$，得 $C\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，　……8 分

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}{\sin C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}.$$　……12 分

因为 $C\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，所以 $\frac{1}{\tan C}\in(0,\sqrt{3})$，得 $\frac{b}{c}\in(\frac{1}{2},2)$　……14 分

19.（Ⅰ）证明：$\because AB//CD$，$AB\subset$ 平面ABP，$CD\not\subset$ 平面ABP

$\therefore CD//$平面ABP　又 $\because CD\subset$ 平面$CDMN$，平面$CDMN\cap$平面$ABP=MN$ $\therefore CD//MN$

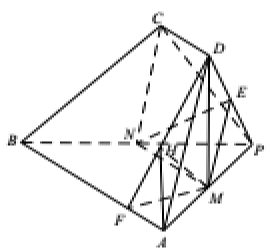
又 $\because MN\subset$ 平面MNE，$CD\not\subset$ 平面MNE　$\therefore CD//$ 平面MNE　……6 分

（Ⅱ）法一（几何法）：

作 $MF\perp AB$ 于 F, 连接 DF，由三垂线定理有 $DF\perp AB$

在$Rt\Delta ADF$中，$\because \angle BAD=60^0, AD=2, \therefore AF=1$

在$Rt\Delta AMF$中，$\because \angle BAM=45^0, \therefore AM=\sqrt{2}, \therefore MP=\sqrt{2}$



$\because M$ 为 AP 的中点，E 为 DP 的中点，　　　　　　　　……9 分

$\therefore MN // AB, ME // AD$，$MN \cap ME = M$.

$\therefore$ 平面 $MNE //$ 平面 $ABCD$，直线 PA 与平面 MNE 所成角，即直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成角.

$\because DM \perp$ 平面 APB，$\therefore DM \perp AB$，又 $\because AB \perp MF$，$DM \cap MF = M$

$\therefore AB \perp$ 平面 DFM，平面 $MDF \perp$ 平面 $ABCD$

过点 M 作 $MH \perp DF$ 交于点 H，连接 AH，则 $MH \perp$ 平面 $ABCD$.

$\therefore \angle MAH$ 是直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成角.　　　　　　……12 分

$\because MF = AF = 1, DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{2}$，$\therefore MH = \dfrac{MF \cdot MD}{DF} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

$$\sin\angle MAH = \frac{MH}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore$ 直线 PA 与平面 MNE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …… 15 分

法二（坐标法）：建立如图空间直角坐标系.连接 DB.

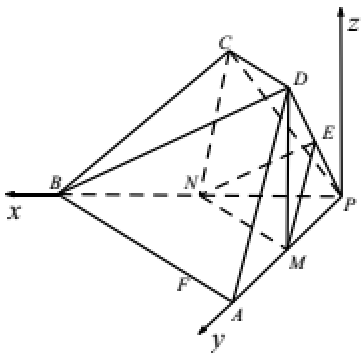
$P(0,0,0)$, $A(0,2\sqrt{2},0)$, $B(2\sqrt{2},0,0)$.

因为 $AB = 4, AD = 2, \angle DAB = 60^\circ$，

由余弦定理可得 $DB = 2\sqrt{3}$.

设点 D 的坐标为 $(0,y,z)(y,z>0)$.

$$\begin{cases} DB^2 = 8 + y^2 + z^2 = 12 \\ AD^2 = (2\sqrt{2} - y)^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ z = \sqrt{2} \end{cases}.$$ ……10 分



所以,点 D 的坐标为 $(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，点 M 的坐标为 $(0,\sqrt{2},0)$，点 N 的坐标为 $(\sqrt{2},0,0)$.

点 E 的坐标为 $(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$. $\overrightarrow{NM} = (-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{ME} = (0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

设平面 MNE 的法向量 $\vec{n} = (a,b,c)$，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{NM} = -\sqrt{2}a + \sqrt{2}b = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{ME} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}b + \dfrac{\sqrt{2}}{2}c = 0 \end{cases}$，　　……12 分

取 $a = b = c = 1$，则 $\vec{n} = (1,1,1)$. $\overrightarrow{PA} = (0,2\sqrt{2},0)$,设直线 PA 与平面 MNE 所成角为 θ.

$\sin\theta = \left|\cos < \vec{n}, \overrightarrow{PA} >\right| = \dfrac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AP}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 故直线 PA 与平面 MNE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …15 分

20.（Ⅰ）将式子化为 $(n-1)S_n-(n+1)S_{n-1}=\frac{1}{3}(n^3-n)=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1), n\ge 2$，

式子左右同除以 $n(n-1)(n+1)$，得 $\frac{S_n}{n(n+1)}-\frac{S_{n-1}}{(n-1)n}=\frac{1}{3}, n\ge 2$.

故 $\left\{\frac{S_n}{n(n+1)}\right\}$ 为以 $\frac{S_1}{2}$ 为首项，公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列. ……4 分

因此，$\frac{S_n}{n(n+1)}=\frac{1}{3}(n-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}n+\frac{1}{6}$，则 $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. ……6 分

因此，$a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1}, & n\ge 2\\ S_1, & n=1\end{cases}$，经计算 $a_n=n^2$ ……8 分

（Ⅱ）法一：将 $a_n=n^2$ 代入 b_n 得 $b_n=\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2$ 且 $T_n=\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdots\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2$ ………10 分

$b_n=\frac{(2n+1)^2}{(2n)^2}>\frac{4n^2+4n}{(2n)^2}=\frac{n+1}{n}$ ………13 分

$T_n=b_1b_2\ldots b_n>\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\ldots\frac{n+1}{n}=n+1$ ………15 分

法二：将 $a_n=n^2$ 代入 b_n 得 $b_n=\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2$ 且 $T_n=\left(\frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times8\times\cdots\times2n}\right)^2$ ……10 分

下证 $\left(\frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times8\times\cdots\times2n}\right)^2>n+1$，即证 $\frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times8\times\cdots\times2n}>\sqrt{n+1}$.

下面用数学归纳法证明.

① 当 $n=1$ 时，$\frac{3}{2}>\sqrt{2}$ 成立. ……11 分

② 假设当 $n=k$ 时，$\frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2k+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2k}>\sqrt{k+1}$ 成立.

当 $n=k+1$ 时，$\frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2k+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2k}\times\frac{2k+3}{2k+2}>\sqrt{k+1}\times\frac{2k+3}{2k+2}$.

下证 $\sqrt{k+1}\times\frac{2k+3}{2k+2}>\sqrt{k+2}$ 成立，即 $2k+3>2\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}$ 成立.

要证 $2k+3>2\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}$，只要证 $(2k+3)^2>4(k+1)(k+2)$ 成立.

该不等式的左边展开为 $4k^2+12k+9$，右边展开为 $4k^2+12k+8$. 故上式显然成立.

因此 $\frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2k+1)\times(2k+3)}{2\times4\times6\times\cdots\times2k\times(2k+2)}>\sqrt{k+2}$ 成立.

综合①②，不等式 $\frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times8\times\cdots\times2n}>\sqrt{n+1}$ 成立. ……15 分

21.（Ⅰ）直线 AB 的方程为 $y=x-1$，代入抛物线方程 $y^2=x$，得 $x^2-3x+1=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=3,x_1x_2=1$.

$|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{10}$ ················5 分

（Ⅱ）设直线 AB 的方程为 $x=1+my$，代入抛物线方程 $y^2=x$ 得，$y^2-my-1=0$.

设 $A(a^2,a)$，$a\cdot y_B=-1,y_B=-\dfrac{1}{a}$，点 B 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{a^2},-\dfrac{1}{a}\right)$.

设切线 PA 的方程为 $x-a^2=m(y-a)$，代入抛物线方程 $y^2=x$，得 $y^2-my+ma-a^2=0$，

$\Delta=m^2-4ma+4a^2=(m-2a)^2=0$，得 $m=2a$，令 $y=0$，得 $x=-a^2$，

所以点 P 的坐标为 $(-a^2,0)$. ················8 分

设直线 PB 的方程为 $x=-a^2+ty$，代入抛物线方程 $y^2=x$ 得，$y^2-ty+a^2=0$，

$\left(-\dfrac{1}{a}\right)\cdot y_c=a^2$，$y_c=-a^3$，$x_c=a^6$，所以点 C 的坐标为 $(a^6,-a^3)$. ················10 分

直线 AC 的方程为 $y-a=\dfrac{a+a^3}{a^2-a^6}(x-a^2)$，即 $y-a=\dfrac{1}{a(1-a^2)}(x-a^2)$，

令 $y=0$, 得 $x=a^4$，所以点 N 的坐标为 $(a^4,0)$. ················11 分

$S_1=\dfrac{1}{2}|PN||y_A-y_C|=\dfrac{1}{2}a^3(a^2+1)^2,S_2=\dfrac{1}{2}|MN|y_A=\dfrac{1}{2}|a^4-1|a$.

由 $k>0$，知 $a>1$, $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{1}{2}a^3(a^2+1)^2}{\frac{1}{2}|a^4-1|a}=\dfrac{a^2(a^2+1)}{a^2-1}$. ················13 分

令 $u=a^2-1$, 则 $a^2=u+1$，$u>0$.

$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{(u+1)(u+2)}{u}=u+\dfrac{2}{u}+3\geq 2\sqrt{2}+3$. 当且仅当 $u=\sqrt{2}$，即 $a^2=\sqrt{2}+1$ 时取等号

所以 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+3$. ················15 分

22. 解：（Ⅰ）法一：由 $h(x)=(x^2-2x)\ln x-a(x^2+2x)\geq 0$ 且 $x>0$，得

$a\leq\dfrac{(x-2)\ln x}{x+2}$. ......2 分

令 $g(x)=\dfrac{(x-2)\ln x}{x+2}$，则 $g'(x)=\dfrac{4\ln x+\dfrac{x^2-4}{x}}{(x+2)^2}$， ......4 分

令 $m(x)=4\ln x+\dfrac{x^2-4}{x}$，因为 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且

$m(1)=-3<0,\ m(2)=4\ln 2>0$，所以 $m(x)$ 存在唯一零点 $x_0\in(1,2)$，满足

$m(x_0)=4\ln x_0+\dfrac{x_0^2-4}{x_0}=0$，且 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增.

$g_{\min}(x)=g(x_0)=\dfrac{(x_0-2)\ln x_0}{x_0+2}=\dfrac{x_0-2}{x_0+2}\cdot(-\dfrac{x_0^2-4}{4x_0})=-\dfrac{1}{4}(x_0+\dfrac{4}{x_0}-4)\in(-\dfrac{1}{4},0)$，因为 a 为整数，所以 a 的最大值为 -1. ......7 分

法二：$h(1)=-3a\geq 0$，所以 $a\leq 0$. ......2 分

当 $a=0$ 时，$h(x)=(x^2-2x)\ln x$，$h(\dfrac{3}{2})=-\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{3}{2}<0$，不成立. ......3 分

当 $a=-1$ 时 $h(x)=x[(x-2)\ln x+x+2]$，令 $n(x)=(x-2)\ln x+x+2$，

则 $n'(x)=\ln x+2-\dfrac{2}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$n'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$n'(x)>0$，所以 $n(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $n(x)\geq n(1)=3>0$，

所以 a 的最大值为 -1. ......7 分

（Ⅱ）$H'(x)=2[(x-1)\ln x-a(x+1)]$，令 $f(x)=(x-1)\ln x-a(x+1)$，则 x_1,x_2 为方程 $f(x)=0$ 有两不同实根. $f'(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+1-a$，所以 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ......9 分

而 $f'(e^{-|a|})=-|a|-\dfrac{1}{e^{-|a|}}+1-a\leq 0$ 且 $f'(e^{|a|})=|a|-\dfrac{1}{e^{|a|}}+1-a\geq 0$，因此 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0，即 $f'(x_0)=\ln x_0-\dfrac{1}{x_0}+1-a=0$，$f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增， ......11 分

所以 $f_{\min}(x)=f(x_0)=(x_0-1)\ln x_0-a(x_0+1)=-2\ln x_0-x_0+\dfrac{1}{x_0}<0$，解得 $x_0>1$，

所以 $a=\ln x_0-\dfrac{1}{x_0}+1>0$. ......13 分

因为 $f(e^a)=-2a<0$，$f(e^{-a})=-2ae^{-a}<0$，由 $f(x)$ 的单调性得 $0<x_1<e^{-a}<e^a<x_2$，

所以 $\dfrac{x_2}{x_1}>e^{2a}$

所以 $x_2>e^{2a}x_1\geq(2a+1)x_1$（对数不等式 $e^x\geq x+1$）. ......15 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “ 专业、专注、有态度 ” 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。