

2021~2022 学年度第一学期期中教学质量检测

### 高三数学试题

2021.11

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 6 页；满分 150 分，考试时间 120 分钟。

**注意事项：**

1. 答卷前，考生务必将自己的考场、座号、姓名、班级填（涂）写在答题纸上，将条形码粘贴在指定位置处。
2. 第 I 卷的答案须用 2B 铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再改涂其它答案标号。
3. 答第 II 卷（非选择题）考生须用 0.5mm 的黑色签字笔（中性笔）作答，答案必须写在答题卡各题目指定的区域内相应位置，如需改动，须先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。否则，该答题无效。
4. 书写力求字体工整、符号规范、笔迹清楚。

#### 第 I 卷（选择题 60 分）

一、单项选择题（本题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分；在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 设集合  $A = \{x | 2 < x < 4\}$ ,  $B = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$ , 则  $A \cup B =$

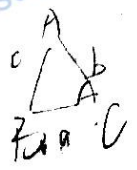
- A.  $\{x | 2 < x \leq 3\}$       B.  $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$   
C.  $\{x | 1 \leq x < 4\}$       D.  $\{x | 1 < x < 4\}$

2. 定义运算  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ , 若复数  $z$  满足  $\begin{vmatrix} zi & -1 \\ z & 1 \end{vmatrix} = 1 - i$ , 则  $\bar{z} =$

- A.  $1+i$       B.  $1-i$       C.  $-i$       D.  $i$

3. 在  $\triangle ABC$  中, “ $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ” 是 “ $C = \frac{\pi}{3}$ ” 的

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件



4. 已知函数  $f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的奇函数, 当  $x > 0$  时,  $f(x) = 10^{ax}$  ( $a$  为常数), 若

$$f\left(\lg \frac{1}{5}\right) = -25, \text{ 则实数 } a =$$

- A. 2                      B. -2                      C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $-\frac{1}{2}$

5. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$ ,  $A \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ , 则  $\triangle ABC$  面积的取值范围是

- A.  $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$                       B.  $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$                       C.  $[1, \sqrt{3}]$                       D.  $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{3}\right]$

6. 在流行病学中, 基本传染数  $R_0$  是指在没有外力介入, 同时所有人都没有免疫力的情况下, 一个感染者平均传染的人数. 假设某种传染病的基本传染数是  $R_0 \neq 3$ , 那么感染人数由 1 个初始感染者经过 5 轮传染得到感染者 (包括初始感染者) 的总人数是多少? (初始感染者传染  $R_0$  个人为第一轮传染, 这  $R_0$  个人每人再传染  $R_0$  个人为第二轮传染, ...)

- A. 363                      B. 364                      C. 365                      D. 366

7. 已知函数  $f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ , 下面结论错误的是

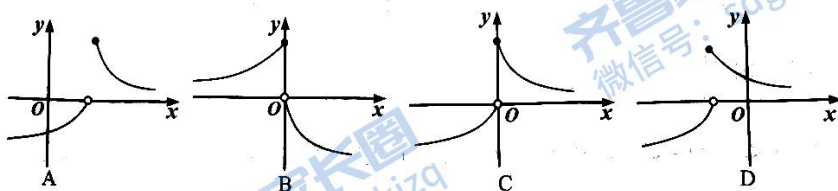
A.  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$  上单调递减

B.  $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$  是函数  $f(x)$  图象的一个对称中心

C.  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  上的值域为  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

D.  $f(x)$  图象上的所有点向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位后得到函数  $g(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$  的图象

8. 函数  $f(x) = \begin{cases} 4^x, & x \leq 1 \\ \log_{\frac{1}{4}} x, & x > 1 \end{cases}$ , 则函数  $y = f(1-x)$  的大致图象是



高三数学试题 第 2 页 (共 6 页)

二、多项选择题 (本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分; 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

9. 已知向量  $\vec{a} + \vec{b} = (-2, 1)$ ,  $\vec{a} - \vec{b} = (4, 3)$ , 则下列结论正确的是
- A.  $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{b}$                       B.  $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$   
 C.  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $\frac{3}{4}\pi$                   D.  $|2\vec{a} + \vec{b}| = 10$
10. 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 公差为  $d$ , 若  $S_6 = a_5 + a_{12}$ ,  $a_1 > 0$ , 则以下结论一定正确的是
- A.  $d < 0$                                   B.  $S_2 = S_3$   
 C.  $|a_1| > |a_9|$                               D.  $S_n$  取得最大值时,  $n = 3$
11. 已知  $2^a = 7^b = 14$ , 则下列关于  $a, b$  可能满足的关系有
- A.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$       B.  $a + b > 4$       C.  $a^2 + b^2 < 8$       D.  $(a-1)^2 + (b-1)^2 > 2$
12. 已知函数  $f(x) = 2^{x+1}$  可以表示成一个偶函数  $g(x)$  和一个奇函数  $h(x)$  之和, 若不等式  $[h(x)]^2 + ag(x) \geq 2$  对  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 则实数  $a$  的可能取值为
- A. -1      B.  $\frac{1}{2}$       C. 1      D. 2

第 II 卷 (非选择题共 90 分)

三、填空题 (本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 已知  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 若  $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$ , 则  $\tan \theta = \underline{\quad}$ .
14. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin 3\omega x - \cos 3\omega x$  ( $\omega > 0$ ) 图象的相邻两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 则  $f(\frac{\pi}{3}) = \underline{\quad}$ .
15. 已知函数  $f(x) = e^x - ax$  在区间  $(0, +\infty)$  上无零点, 则实数  $a$  的取值范围是  $\underline{\quad}$ .

高三数学试题 第 3 页 (共 6 页)

16. 十九世纪法国数学家卢卡斯提出数列  $\{L_n\}$ : 2, 1, 3, 4, 7, ..., 称之为卢卡斯数列, 且满足  $L_1 = 2, L_2 = 1, L_{n+1} = L_n + L_{n-1} (n \geq 2)$ , 则  $L_{12} = \underline{\quad\triangle\quad}$ ; 记  $S_n$  为数列  $\{L_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $L_{2023} = t$ , 则  $S_{2021} = \underline{\quad\triangle\quad}$ . (本题第一空 2 分; 第二空 3 分)

四、解答题 (本题共 6 个小题, 共 70 分; 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

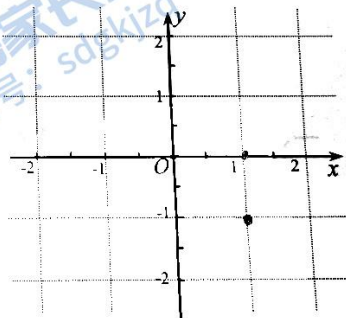
一般地, 任何一个复数  $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$  都可以表示成  $r(\cos\theta + i\sin\theta)$  形式. 其中,  $r$  是复数  $z$  的模,  $\theta$  是以  $x$  轴的非负半轴为始边, 向量  $\overrightarrow{OZ}$  所在射线 (射线  $OZ$ ) 为终边的角, 叫做复数  $z = a + bi$  的辐角,  $r(\cos\theta + i\sin\theta)$  叫做复数  $z = a + bi$  的三角表示式, 简称三角形式. 为了与“三角形式”区分开来,  $a + bi (a, b \in \mathbf{R})$  叫做复数的代数表示式, 简称“代数形式”.

(I) 画出复数  $z = 1 - i$  对应的向量, 并把  $z = 1 - i$  表示成三角形式;

(II) 已知  $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1, z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2,$

$$\cos(\pi + \theta_1 + \theta_2) = \frac{3}{5}, \text{ 其中 } \theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \theta_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

试求  $z_1 z_2$  (结果表示为代数形式).





18. (本小题满分 12 分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 中,  $a_1, a_2, a_3$  分别是下表第一、二、三行中的某一个数, 且其中的任意两个数均不在下表中的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	2	1	3
第二行	8	4	5
第三行	9	11	6

(I) 请选择一个可能的  $\{a_1, a_2, a_3\}$  组合, 并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 记 (I) 中您选择的数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 试判断是否存在正整数  $k$ , 使得  $a_1, a_k, S_{k+2}$  成等比数列? 若有, 则求出  $k$  的值; 若没有, 说明理由.

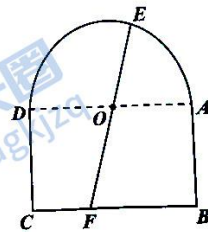
19. (本小题满分 12 分)

某城市公园有一如图所示的绿化带, 其形状由一个直径为  $2\text{km}$  的半圆  $O$  和矩形  $ABCD$  组成, 其中  $AB = 1\text{km}$ . 管理部门规划在圆心  $O$  处建造一个亭子, 为了方便游客到亭子游玩, 决定从  $A$  地出发修建一条经过亭子  $O$  处到达  $BC$  的公路, 具体路线是: 在半圆  $O$  上选点  $E$  (异于  $A, D$  点), 从点  $A$  沿圆弧到点  $E$ , 再从点  $E$  经过亭子  $O$  的直线到达  $BC$  边上的点  $F$  处. 已知从点  $A$  到点  $E$  的修路费用每千米需要  $\frac{1}{5}a$  元, 从点

$E$  到点  $F$  的修路费用每千米需要  $\frac{1}{6}a$  元, 设  $\angle AOE = \theta$  弧度, 从  $A$  地经点  $E, O$  到  $F$  地修路所需费用为  $y$  元.

(I) 试将  $y$  表示为  $\theta$  的函数  $y = f(\theta)$ , 并写出定义域;

(II) 当  $\cos \theta$  取何值时, 修路所需费用最少?



20. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 且满足  $\sin^2 B - \sin^2 A - \sin^2 C = \sin A \sin C$ .

(I) 求角  $B$  大小;

(II) 若  $O$  是  $\triangle ABC$  内部一点,  $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle BOC = \frac{5\pi}{6}$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 1$ ,

(1) 请猜想  $\angle BAO$  与  $\angle OBC$  的关系, 并说明理由;

(2) 求  $\tan \angle BAO$  的值.

21. (本小题满分 12 分)

设数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} - S_n = 1$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

(I) 求出  $\{a_n\}$  通项公式;

(II) 若  $b_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数,} \\ n(n+2), & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $2n$  项和  $T_{2n}$ .

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = ae^x$ ,  $g(x) = \ln \frac{x}{a} - 1$ , 其中  $a > 0$ .

(I) 若  $a = \frac{1}{2}$ , 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 过坐标原点  $O$  分别作函数  $y = f(x)$  与

函数  $y = g(x)$  图象的切线  $l_1$  和  $l_2$ , 求  $l_1, l_2$  的斜率之积;

(II) 若对  $x \in (0, +\infty)$  上, 总有  $f(x) \geq g(x) + 1$  成立, 试求实数  $a$  的最小值.

## 关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注齐鲁家长圈微信号：sdgkjzq。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索