2023年普通高等学校招生全国统一考试
高三第一次联合诊断检测　数学参考答案

一、单选题

1～8 DCBBABBC

第8题提示：由$e^x\geqslant 1+x$，$\therefore e^{-\frac{3}{5}}>\frac{2}{5}$，又$\ln(1+x)\leqslant x$，$\therefore \ln 5-\ln 4=\ln(1+\frac{1}{4})<\frac{1}{4}$

二、多选题

9．ABD　　10．ABD　　11．ABD　　12．ACD

第11题提示：$y=f(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{4},0)$中心对称，则$\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi$，其中$k\in\mathbf{Z}$，

$\omega=\frac{12k-4}{3}$，所以充要条件是$\omega\in\mathbf{S}=\{\omega\mid\omega=\frac{12k-4}{3},\ k\in\mathbf{Z},\ \omega>0\}$.

对于A，$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\omega=\frac{8}{3}=\frac{12\cdot 1-4}{3}$，故A正确；对于B，可知$(-\frac{\pi}{8},0)$是原函数的对称点，

$-\frac{\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi\Rightarrow\omega=\frac{-24k+8}{3}=\frac{12(-2k+1)-4}{3}\in\mathbf{S}$，故B正确；对于C，$\sin(-\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$-\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{3}$或$2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$\omega=-8k$或$-\frac{24k+4}{3}$，$\omega$不一定在$\mathbf{S}$中，C错误；对于D，

$\frac{\pi}{16}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=16k+\frac{8}{3}=\frac{12(4k+1)-4}{3}\in\mathbf{S}$，故D正确.

第12题提示：$f(x)=(x-1)(x^3+x^2+1)$，对于函数$g(x)=x^3+x^2+1$，$g'(x)=3x^2+2x$，可得$g(x)$在$x=-\frac{2}{3}$，$x=0$处分别取极大值和极小值，由$g(0)>0$，知$g(x)$只有一个零点，$f(x)$有两个零点，A正确；假设B成立，设切点坐标为$(x_0,\ f(x_0))$，切线方程

$y=(4x_0^3-2x_0+1)(x-x_0)+x_0^4-x_0^2+x_0-1$即$y=(4x_0^3-2x_0+1)x-3x_0^4+x_0^2-1$，

$\therefore -3x_0^4+x_0^2-1=0$，但显然$-3x_0^4+x_0^2-1<0$，B错误；$f'(x)=4x^3-2x+1$，$f''(x)=12x^2-2$，

$\therefore f'(x)$在$x=-\frac{\sqrt{6}}{6}$，$\frac{\sqrt{6}}{6}$分别取到极大值和极小值，由$f'(\frac{\sqrt{6}}{6})>0$知$f'(x)$只有一个零点，

$f(x)$有一个极值点；若D正确，则存在实数m使得$f'(x)=4x^3-2x+1=m$有三个不同的根，

此时只需$m\in(f'(\frac{\sqrt{6}}{6}),\ f'(-\frac{\sqrt{6}}{6}))$即可成立，故D正确.

三、填空题

13．-5376　　14．4　　15．$(-2,0)$　　16．$-\frac{88}{25}$

第 15 题提示：$\because -3=3f(2)=f(8)$，$f(x+2)+f(x+4)>-3\Rightarrow\begin{cases}f(x^2+6x+8)>f(8)\\x+2>0\\x+4>0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x^2+6x+8<8\\x>-2\end{cases}\Rightarrow -2<x<0$

第 16 题提示：设 AB 中点为 M，$\overrightarrow{QP}=2(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BQ})\Rightarrow\overrightarrow{QP}=4\overrightarrow{MQ}$，

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{QM}-\overrightarrow{MA})=|\overrightarrow{QM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2$

由 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$，知 P 点轨迹是以 AB 为弦，圆周角为 $\frac{\pi}{3}$ 的优弧，$\therefore$ 当 $PM\perp AB$ 时，$|QM|$ 最大，

此时 $\triangle PAB$ 是等边三角形，$|QM|=\frac{2\sqrt{3}}{5}$，$|\overrightarrow{QM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2=\frac{12}{25}-4=-\frac{88}{25}$.

四、解答题

17.（10 分）

解：（1）由正弦定理 $\sin B=\sin C(\cos A+\sin A)$，$\sin(A+C)=\sin C\cos A+\sin C\sin A$

$\Rightarrow \sin A\cos C=\sin C\sin A$，$\tan C=1$，$C=\frac{\pi}{4}$ …………5 分

（2）由正弦定理得：

$\frac{a+\sqrt{2}b}{c}=\frac{\sin A+\sqrt{2}\sin B}{\sin C}=\sqrt{2}(\sin A+\sqrt{2}\sin(A+\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}(2\sin A+\cos A)=\sqrt{10}\sin(A+\varphi)$，

其中 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$，又 $A\in(0,\frac{3\pi}{4})$，故 $A+\varphi\in(\varphi,\frac{3\pi}{4}+\varphi)$，$\therefore\sin(A+\varphi)_{\max}=1$，

$\therefore\sqrt{10}\sin(A+\varphi)_{\max}=\sqrt{10}$，故 $\frac{a+\sqrt{2}b}{c}$ 的最大值为 $\sqrt{10}$. …………10 分

18.（12 分）

解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q（$q>0$），

$\therefore b_n=(\lg a_{n+1}+\lg a_n)(\lg a_{n+1}-\lg a_n)=\lg a_1^2q^{2n-1}\cdot\lg q=(2\lg a_1+(2n-1)\lg q)\cdot\lg q$

故 $b_{n+1}=(2\lg a_1+(2n+1)\lg q)\cdot\lg q$，所以 $b_{n+1}-b_n=2\lg^2 q$，

故 $\{b_n\}$ 是以 $2\lg^2 q$ 为公差的等差数列；…………6 分

（2）$\because$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项和为 35，$\therefore 5b_3=35$，$b_3=7$，又 $b_4=9$，故 $\{b_n\}$ 的公差 2，

故 $b_n=2n+1$，即 $(2\lg a_1+(2n-1)\lg q)\cdot\lg q=2n+1$，

故 $\lg^2 q=1$ 且 $(2\lg a_1-\lg q)\lg q=1$，从而 $q=10$，

$a_1=10$ 或 $q=\dfrac{1}{10}$，$a_1=\dfrac{1}{10}$，所以 $a_n=10^n$ 或 $\dfrac{1}{10^n}$．…………12 分

19.（12 分）

解：（1）设 A_1B 中点为 M，则 $AM\perp A_1B$

$\because$ 平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore AM\perp$ 平面 A_1BC，$\therefore AM\perp BC$

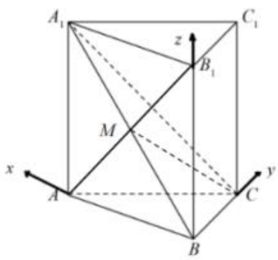
又直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$\therefore BB_1\perp BC$

$\therefore BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore AB\perp BC$…………6 分

（2）由（1）直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 $\angle ACM=\dfrac{\pi}{6}$，

不妨设 $AB=2$，$AM=\sqrt{2}$，$AC=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=2$

以 B 为原点，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BB_1}$ 分别为 x，y，z 轴正向建立坐标系



$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$E(1,1,1)$

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=0\\ x+y+z=0\end{cases}$，令 $y=1$，$\vec{n}=(0,1,-1)$

同理可得平面 CBE 的法向量为 $\vec{m}=(1,0,-1)$

设平面 ABE 与平面 BCE 所成锐二面角的大小为 θ

$\therefore\cos\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ …………12 分

20.（12 分）

解：（1）由题得

	合格	不合格	合计
2022 年 7 月	20	5	25
2022 年 8 月	10	15	25
合计	30	20	50

$K^2=\dfrac{50(20\cdot15-5\cdot10)^2}{25\cdot25\cdot30\cdot20}=8\dfrac{1}{3}>3.841$

$\therefore$ 可以在犯错的概率不超过 0.05 的前提下认为“驾考新规的实施”对该驾校学员首次参加科目一考试的合格率有影响…………6 分

（2）由题该地 7 月份不合格率为 $\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$，8 月份不合格率为 $\dfrac{15}{25}=\dfrac{3}{5}$，抽取 7 月份首次参加考试的学员概率

为$\frac{2}{3}$，抽取8月份首次参加考试的学员概率为$\frac{1}{3}$

X可能的取值为0，1，2

$$P(X=0)=(\frac{2}{3})^2(\frac{4}{5})^2+C_2^1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}+(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{5})^2=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{5})^2+C_2^1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+(\frac{1}{3})^2(\frac{3}{5})^2=\frac{1}{9}$$

$$P(X=1)=1-P(X=2)-P(X=0)=\frac{4}{9}$$

X	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$EX=0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$ …………12分

21.（12分）

解：（1）由题$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$，$a^2=b^2+c^2$，联立解得$a^2=8$，$b^2=4$

椭圆方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ …………4分

（2）设$N(x_0,\ y_0)$，$P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，直线$l_{NP}:y=k(x-x_0)+y_0$

联立椭圆方程得$(2k^2+1)x^2+4(y_0-kx_0)kx+2(y_0-kx_0)^2-8=0$

$$x_1+x_0=\frac{4(kx_0-y_0)k}{2k^2+1}，\therefore x_1=\frac{2k^2x_0-4ky_0-x_0}{2k^2+1}$$

$$y_1=k(x_1-x_0)+y_0=\frac{y_0-2kx_0-2k^2y_0}{2k^2+1}$$

同理可得$x_2=\frac{2k^2x_0+4ky_0-x_0}{2k^2+1}$，$y_2=\frac{y_0+2kx_0-2k^2y_0}{2k^2+1}$

$$\therefore k_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4kx_0}{8ky_0}=\frac{x_0}{2y_0}，\ k_2=\frac{y_0}{x_0}$$

$\therefore k_1k_2=\frac{1}{2}$ …………12分

22.（12分）

解：（1）$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$

$\therefore f(x)$在$(0,\ \frac{1}{a})$上单调递减，在$(\frac{1}{a},\ +\infty)$上单调递增

$f_{\min}(x)=f(\frac{1}{a})=1+\ln a$

当$a>\frac{1}{e}$时，$f(\frac{1}{a})>0$，$f(x)$的零点个数为0；当$a=\frac{1}{e}$时，$f(x)$的零点个数为1；

当$0<a<\frac{1}{e}$时，$f(x)$的零点个数为2…………5分

（2）由题$\frac{e^{ax}}{ax}\geqslant ax-\ln x=\ln\frac{e^{ax}}{ax}+\ln a$

令$t=\frac{e^{ax}}{ax}$，对于$g(x)=\frac{e^x}{x}$，$g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，$\therefore g(x)\geqslant g(1)=e$，$t\geqslant e$

$\therefore t\geqslant \ln t+\ln a$对$t\geqslant e$恒成立

对于$h(t)=t-\ln t$，$h'(t)=\frac{t-1}{t}$，$\therefore h(t)$在$[e,+\infty)$上单调递增

$\therefore h(t)\geqslant h(e)=e-1$

$\therefore \ln a\leqslant e-1$，$0<a\leqslant e^{e-1}$ …………12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。