



## 河北省高三年级上学期 12 月联考 数 学

### 注意事项:

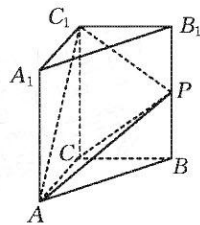
1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | 3 < x < 9\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 6x - 7 \leq 0\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$   
 A. (5, 7)                      B. (7, 9)                      C. (3, 7)                      D.  $(-1, 3) \cup (7, 9)$
2. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 若  $a + 4i$  与  $3 - bi$  互为共轭复数, 则  $|a + bi| =$   
 A. 8                              B. 7                              C. 6                              D. 5
3. 已知  $3\sin^2\theta + 5\sin\theta - 2 = 0$ , 则  $\cos 2\theta =$   
 A.  $\frac{7}{9}$                               B.  $\frac{8}{9}$                               C.  $\frac{2}{3}$                               D.  $\frac{1}{3}$
4. 某学习小组共有 20 人, 在一次数学测试中, 得 100 分的有 2 人, 得 95 分的有 4 人, 得 90 分的有 5 人, 得 85 分的有 3 人, 得 80 分的有 5 人, 得 75 分的有 1 人, 则这个学习小组成员该次数学测试成绩的第 70 百分位数是  
 A. 82.5                          B. 85                              C. 90                              D. 92.5
5. 下列函数中, 在定义域内既是奇函数又单调递增的是  
 A.  $f(x) = \sin x - x^2$                       B.  $f(x) = \ln(2-x) - \ln(x+2)$   
 C.  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$                               D.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
6. 若  $P$  是一个质数, 则像  $2^P - 1$  这样的正整数被称为梅森数, 从 50 以内的所有质数中任取两个数, 则这两个数都为梅森数的概率为  
 A.  $\frac{1}{35}$                               B.  $\frac{3}{35}$                               C.  $\frac{3}{25}$                               D.  $\frac{1}{5}$
7. 已知函数  $f(x) = |\ln(x+1)| + \frac{2}{x+1}$ , 则  
 A.  $x=0$  是  $f(x)$  的极小值点                      B.  $x=1$  是  $f(x)$  的极大值点  
 C.  $f(x)$  的最小值为  $1 + \ln 2$                       D.  $f(x)$  的最大值为 3
8. 已知双曲线  $C: x^2 - y^2 = 2$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在  $C$  的右支上且在第一象限, 线段  $PF_1$  的中点  $Q$  在  $C$  的渐近线上, 则点  $P$  的坐标为  
 A.  $(\sqrt{3}, 1)$                       B.  $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$                       C.  $(\sqrt{6}, 2)$                       D.  $(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

二、选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知向量  $a = (m+1, -1)$ ,  $b = (1-m, 2)$ , 下列说法正确的是
- A. 若  $a // b$ , 则  $m = -3$     B. 存在  $m \in \mathbf{R}$ , 使得  $a \perp b$
- C.  $|a+b| = \sqrt{5}$     D.  $a$  与  $b$  的夹角为锐角
10. 已知圆  $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + 3 = 0$  的圆心坐标为  $(2, 0)$ , 则
- A.  $D = -4, E = 0$
- B. 圆  $C$  的半径为 2
- C. 圆  $C$  上的点到直线  $y = \frac{3}{4}x$  距离的最小值为  $\frac{1}{5}$
- D. 圆  $C$  上的点到直线  $y = \frac{3}{4}x$  距离的最小值为  $\frac{6}{5}$
11. 2022 年 9 月钱塘江多处出现罕见潮景“鱼鳞潮”,“鱼鳞潮”的形成需要两股涌潮,一股是波状涌潮,另外一股是破碎的涌潮,两者相遇交叉就会形成像鱼鳞一样的涌潮.若波状涌潮的图象近似函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A, \omega \in \mathbf{N}^*$ ,  $|\varphi| < \frac{\pi}{3}$ ) 的图象,而破碎的涌潮的图象近似  $f'(x)$  ( $f'(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数) 的图象.已知当  $x = 2\pi$  时,两潮有一个交叉点,且破碎的涌潮的波谷为  $-4$ , 则
- A.  $\omega = 2$     B.  $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$
- C.  $f'(x - \frac{\pi}{4})$  是偶函数    D.  $f'(x)$  在区间  $(-\frac{\pi}{3}, 0)$  上单调
12. 在《九章算术》中,底面是直角三角形的直三棱柱被称为“堑堵”.如图,在堑堵  $ABC-A_1B_1C_1$  中, $P$  是棱  $BB_1$  的中点, $AA_1 = AC = BC = 2$ ,若平面  $\alpha$  过点  $P$ ,且与  $AC_1$  平行,则
- A. 异面直线  $AC_1$  与  $CP$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{10}}{10}$
- B. 三棱锥  $C_1-ACP$  的体积是该“堑堵”体积的  $\frac{1}{3}$
- C. 当平面  $\alpha$  截棱柱的截面图形为等腰梯形时,该图形的面积等于  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- D. 当平面  $\alpha$  截棱柱的截面图形为直角梯形时,该图形的面积等于  $2\sqrt{2}$



三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知  $a^2 + 9b^2 = 12$ , 则  $ab$  的最大值为  $\underline{\quad\blacktriangle\quad}$ .
14. 已知  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的奇函数,当  $x \in [0, +\infty)$  时,  $f(x) = 2^x - \frac{1}{x+1}$ , 则不等式  $f(3x-1) < f(1-x)$  的解集为  $\underline{\quad\blacktriangle\quad}$ .
15. 在空间四边形  $ABCD$  中,  $AB = BC = 4$ ,  $AD = DC = 5$ ,  $AB \perp BC$ , 二面角  $B-AC-D$  的余弦值为  $-\frac{2\sqrt{34}}{17}$ , 则空间四边形  $ABCD$  的外接球的表面积为  $\underline{\quad\blacktriangle\quad}$ .
16. 已知曲线  $C$  由抛物线  $x^2 = 4y$  及抛物线  $x^2 = -4y$  组成,  $A(4, 3)$ ,  $B(4, -3)$ ,  $D, E$  是曲线  $C$  上关于  $x$  轴对称的两点,  $A, B, D, E$  四点不共线,其中点  $D$  在第一象限,则四边形  $ABED$  周长的最小值为  $\underline{\quad\blacktriangle\quad}$ , 此时直线  $AD$  的斜率为  $\underline{\quad\blacktriangle\quad}$ . (本题第一空 3 分,第二空 2 分)

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 已知  $c \sin A \cos B = \frac{4}{5} a \sin C$ , 且  $\triangle ABC$  的面积为 9.

(1) 求  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ;

(2) 若  $c = \frac{6}{5}a$ , 求  $b$ .

18. (12 分)

已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $S_n = 2a_n - 1$ .  $\{b_n\}$  为等差数列,  $b_3 = a_1 + 6$ ,  $b_1 + b_3 = 10$ .

(1) 求  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的通项公式;

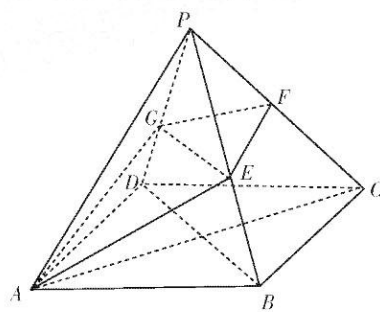
(2) 设  $c_n = a_n b_n$ , 数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求  $T_n$ .

19. (12 分)

已知四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  为正方形,  $PB = PD$ ,  $F$  为棱  $PC$  上的点, 过  $AF$  的平面分别交  $PB, PD$  于点  $E, G$ , 且  $BD \parallel$  平面  $AEFG$ .

(1) 证明:  $EG \perp$  平面  $PAC$ .

(2) 若  $F$  为  $PC$  的中点,  $PA = PC = AB$ , 求直线  $PB$  与平面  $AEFG$  所成角的正弦值.



20. (12分)

甲、乙两家公司生产同一种零件,其员工的日工资方案如下:甲公司,底薪 140 元,另外每生产一个零件的工资为 2 元;乙公司,无底薪,生产 42 个零件以内(含 42 个)的员工每个零件 4 元,超出 42 个的部分每个 5 元.假设同一公司的员工一天生产的零件个数相同,现从这两家公司各随机选取一名员工,并分别记录其 30 天生产的零件个数,得到如下频数表:

甲公司一名员工生产零件个数频数表

生产零件个数	38	39	40	41	42
天数	5	9	5	6	5

乙公司一名员工生产零件个数频数表

生产零件个数	40	41	42	43	44
天数	3	9	6	9	3

若将频率视为概率,回答以下问题.

- (1)现从记录甲公司某员工 30 天生产的零件个数中随机抽取 3 天的个数,求这 3 天生产的零件个数都不高于 39 的概率;
- (2)小明打算到甲、乙两家公司中的一家应聘生产零件的工作,如果仅从日工资的角度考虑,请利用所学的统计学知识为小明做出选择,并说明理由.

21. (12分)

已知椭圆  $C$  的右焦点与抛物线  $E: y^2 = 8x$  的焦点  $F$  重合,且椭圆  $C$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ .

- (1)求椭圆  $C$  的标准方程.
- (2)过点  $F$  的直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $M, N$  两点,交抛物线  $E$  于  $P, Q$  两点,是否存在实数  $\lambda$ ,使得  $\frac{\lambda}{|MN|} - \frac{2}{|PQ|}$  为定值? 若存在,求出这个定值和  $\lambda$  的值;若不存在,说明理由.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = e^{ax} - \frac{1}{2}ax^2 - x - 1$ .

- (1)当  $a \geq 1$  时,证明:对任意的  $x \geq 0$ ,都有  $f(x) \geq 0$ .
- (2)证明:  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > 2\ln(n+1) - n\ln 2 (k \in \mathbf{N}^*, n \in \mathbf{N}^*)$ .



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线