遵义市 2023 届高三年级第一次统一考试

理科数学

（满分:150 分，时间:120 分钟）

注意事项:

1.考试开始前，请用黑色签字笔将答题卡上的姓名，班级，考号填写清楚，并在相应位置粘贴条形码.

2.客观题答题时，请用 2B 铅笔答题，若需改动，请用橡皮轻轻擦拭干净后再选涂其它选项;主观题答题时，请用黑色签字笔在答题卡相应的位置答题;在规定区域以外的答题不给分;在试卷上作答无效.

一、选择题:本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分;在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|-1<x<3\}, B=\{0,1,2,3,4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{-1,0,1,2\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{3,4\}$

2. 已知复数 z 满足 $iz=3+2i$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{13}$　　B. 5　　C. 1　　D. 13

3. 若 t 是方程 $x+\ln x-2=0$ 的根，则下列选项正确的是

A. $1<t<2$　　B. $2<t<3$　　C. $3<t<4$　　D. $0<t<1$

4. 为了得到函数 $y=\sin x$ 的图象，只要把函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有的点

A. 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度　　B. 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度　　D. 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

5. 下列说法正确的是

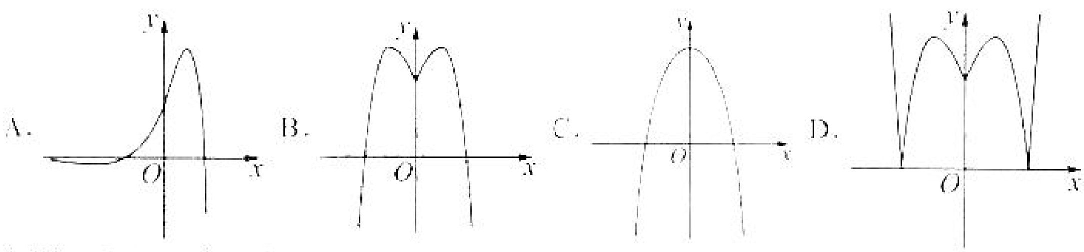
A. 命题 “若 $x<1$，则 $x-2\le 0$” 的否命题是:“若 $x<1$，则 $x-2>0$”

B. “$x=2$” 是 “$x^2-5x+6=0$” 的必要不充分条件

C. 命题“$\exists x_0\in R$，使得 $x^2+x-1<0$”的否定是:“$\forall x\in R$，均有 $x^2+x-1>0$”

D. 命题“若 $\cos x\ne\cos y$，则 $x\ne y$”为真命题

6. 函数 $f(x)=e^{|x|}\left(3-x^2\right)$ 的大致图象为



7. 如图 1，规定 1 个正方形对应 1 个三角形和 1 个正方形，1 个三角形对应 1 个正方形．已知

图 2 中，第 1 行有 1 个正方形和 1 个三角形，按上述规定得到第 2 行，共有 2 个正方形和 1 个三角形，按此规定继续可得到第 3 行，第 4 行，第 5 行，则在图 2 中前 5 行正方形个数的总和为

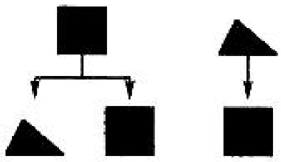


图 1

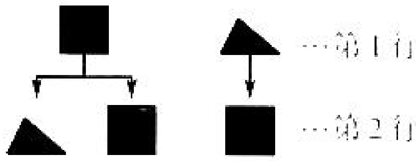


图 2

A．8　　B．19　　C．32　　D．59

8．已知锐角$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$A=\frac{\pi}{3},a=\sqrt{3}$，则$bc$的取值范围为

A．$(2,3]$　　B．$(1,4]$　　C．$(1,3]$　　D．$(2,4]$

9．已知定义在$\mathbf{R}$上的偶函数$f(x)$满足$f(1-x)=f(3+x)$，且当$x\in[0,2]$时，

$f(x)=\begin{cases}2^x+1, & 0\le x<1\\ \log_2(x+3), & 1\le x\le 2\end{cases}$，则$f(-2023)=$

A．$\log_2 6$　　B．1　　C．2　　D．3

10．若函数$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$在区间$\left[\frac{\pi}{12},\theta\right)$内不存在最小值，则$\theta$的取值范围是

A．$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$　　B．$\left[\frac{\pi}{4},\pi\right)$　　C．$\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$　　D．$\left(\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$

11．已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$在区间$[0,\pi]$上有且仅有 4 条对称轴，给出下列四个结论：

①$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有且仅有 3 个不同的零点；

②$f(x)$的最小正周期可能是$\frac{\pi}{2}$；

③ω的取值范围是$\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$；

④$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$上单调递增．其中正确的个数为

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

12．已知$a=\pi^{\sqrt{2}},b=(\sqrt{2})^{\pi},c=4$，则

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n=3^n+1\left(n\in N^*\right)$，则$a_3=$______．

14. 若直线 $y=k(x-1)$ 与曲线 $y=e^x$ 相切，则切点的坐标为_____.

15. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2\sin x+3$，则不等式 $f(\log_2 x)<3$ 的解集为_____.

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\ge a\\ |x-a-1|+a, & x<a\end{cases}$，若函数 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的取值范围为_____.

三、解答题:本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题:

17. (12 分)

已知 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\sin x+\cos x=\dfrac{1}{3}$.

(1) 求 $\sin x\cos x$ 的值;

(2) 求 $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}$ 的值.

18. (12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+3x+b(a,b\in R)$ 在 $x=1$ 处取得极值 2 .

(1) 求 a,b 的值;

(2) 若方程 $f(x)=-x^2+6x+k$ 有三个相异实根，求实数 k 的取值范围.

19. (12 分)

在① S_2 是 S_1 与 S_4 的等比中项;② $a_3=10$;③ $S_3-a_4=4$ 这三个条件中任选两个补充到下面的横线中并解答.

问题：已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足______.

(1) 求 a_n ;

(2) 若 $b_n=b_{n-1}+2a_n(n\ge 2)$，且 $b_1=a_1+1$，求数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

注：如果选择多个组合分别作答，则按第一个解答计分.

20. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\dfrac{a-c}{a+b}$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $b=3,BD$ 为 $\angle ABC$ 的角平分线, D 在 AC 上，且 $BD=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-ax(a\in R)$. (参考数据: $\ln 2\approx 0.693,e\approx 2.718$)

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若$\dfrac{f(x)}{x} \geq a(x\ln x+1-x)$恒成立，求$a$的取值范围.

(二)选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22. 在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases} x=-2+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点$O$为极点，$x$轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程是$\rho^2=4\rho\cos\theta+5$.

(1) 求曲线C的直角坐标方程；

(2) 若直线l与曲线C交于A,B两点，点$P(-2,0)$，求$\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}$的值.

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 已知函数$f(x)=5-|x+d|-|x-2$.

(1) 当$a=1$时，求不等式$f(x)\geq 0$的解集；

(2) 若$f(x)\leq 1$恒成立，求a的取值范围.

遵义市2023届高三年级第一次统一考试参考答案
理科数学

一、选择题

1. C　2.A　3.A　4.C　5.D　6.B　7.B　8.A　9.C　10.D　11.B　12.D

二、填空题

13．18　　14．$(2,e^2)$　　15．$(0,1)$　　16．$[-2,2]$

三、解答题

17．解（1）$\because \sin x+\cos x=\frac{1}{3}$.

$\therefore (\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{9}$，--3 分

$\therefore 1+2\sin x\cos x=\frac{1}{9}$--5 分

故$\sin x\cos x=-\frac{4}{9}$--6 分

（2）$\sin(2x-\frac{\pi}{3})+2\sqrt{3}\cos^2(x-\frac{\pi}{6})-\sqrt{3}$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(2x-\frac{\pi}{3})$--8 分

$=2\sin 2x$--10 分

由(1)知$\sin x\cos x=-\frac{4}{9}$，故$2\sin 2x=4\sin x\cos x=-\frac{16}{9}$.----------------12 分

18．解：(1) $f'(x)=x^2+2ax+3(a,b\in\mathrm{R})$--1 分

$\therefore f'(1)=2a+4=0, f(1)=\frac{10}{3}+a+b=2$--3 分

$\therefore a=-2, b=\frac{2}{3}$--6 分

(2)自(1)知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+\frac{2}{3}$

构造函数$g(x)=f(x)-(-x^2+6x+k)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{2}{3}-k$

则$g(x)$有三个零点即为方程$f(x)=-x^2+6x+k$有三个相异实根----------------7 分

$g'(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$--8 分

令$g'(x)=0$，$x=-1$或$x=3$--9 分

且$x\in(-\infty,-1)$时，$g'(x)>0$，$x\in(-1,3)$时，$g'(x)<0$，$x\in(3,+\infty)$，$g'(x)>0$；

$\therefore g(x)$在$x=-1$取得极大值$g(-1)=\frac{7}{3}-k$，

遵义市2023届高三年

在 $x=3$ 处取得极小值 $g(3)=-\frac{25}{3}-k$．---------------------------------------10 分

三次函数 $g(x)$ 有三个零点需要 $\begin{cases} g(-1)>0 \\ g(3)<0 \end{cases}$，解得 $-\frac{25}{3}<k<\frac{7}{3}$

所以 k 的取值范围为 $(-\frac{25}{3},\frac{7}{3})$.---12 分

19.解：(1)若选①②:

由①知 S_2 是 S_1 与 S_4 的等比中项，则 $S_2^2=S_1S_4$，-----------------------------------1 分

即 $(2a_1+d)^2=a_1(4a_1+6d)$.由 $d\neq 0$ 可得 $d=2a_1$----------------------------------2 分

由②知，$a_3=10$，可得 $a_1+2d=10$，则有 $\begin{cases} d=2a_1 \\ a_1+2d=10 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} d=4 \\ a_1=2 \end{cases}$．----------------4 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=4n-2\left(n\in N^*\right)$.---5 分

若选①③:

由①知 S_2 是 S_1 与 S_4 的等比中项，则 $S_2^2=S_1S_4$，-----------------------------------1 分

即 $(2a_1+d)^2=a_1(4a_1+6d)$.由 $d\neq 0$ 可得 $d=2a_1$，---------------------------------2 分

由③知 $S_3-a_4=4$，可得 $3a_1+3d-(a_1+3d)=4$，解得 $a_1=2$，则 $d=4$．-------------4 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=4n-2\left(n\in N^*\right)$.--5 分

若选②③

由②知 $a_3=10$，可得 $a_1+2d=10$，---2 分

由③知 $S_3-a_4=4$，可得 $3a_1+3d-(a_1+3d)=4$，解得 $a_1=2$，则 $d=4$．---------------4 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=4n-2\left(n\in N^*\right)$..---5 分

(2)由题意知，$b_n-b_{n-1}=2a_n=8n-4(n\geq 2)$，且 $b_1-a_1=1$，所以 $b_1=3$.-----------------6 分

当 $n\geq 2$时，

$$\begin{aligned} b_n&=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1}) \\ &=3+12+20+\cdots+(8n-4) \\ &=3+\frac{(8n-4+12)(n-1)}{2} \\ &=4n^2-1 \end{aligned}$$
---8 分

因为 $b_1=3$ 也满足 $b_n=4n^2-1$，所以对任意的 $n\in N^*$，$b_n=4n^2-1$---------------------9 分

则 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$.-------------------------------------- ----10 分

所以：

年级第一次统一考试理科数学参考答案
第 1页 共 2 页

$T_n=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{n}{2n+1}$

故 $T_n=\frac{n}{2n+1}\left(n\in N^*\right)$--12 分

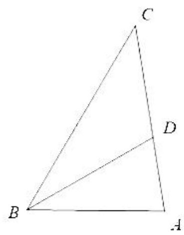
20 解：（1）因为$\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{a-c}{a+b}$，由正弦定理得$\frac{a-b}{c}=\frac{a-c}{a+b}$，--------------2 分

化简得$b^2=a^2+c^2-ac$，所以由余弦定理得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}=\frac{1}{2}$，------------4 分

又因为$B\subset(0,\pi)$，---5 分

所以$B=\frac{\pi}{3}$.--6 分

（2）如图所示



因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$------------------------------------7 分

即$\frac{1}{2}ac\sin\angle ABC=\frac{1}{2}c\times BD\times\sin\angle ABD+\frac{1}{2}a\times BD\times\sin\angle CBD$，

化简得$a+c=\frac{\sqrt{3}}{2}ac$ ①,-------------------------------------8 分

又由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 即$(a+c)^2-3ac=9$②,

--9 分

①②联立解得$ac=-2$（舍去）或$ac=6$，---10 分

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.---12 分

21.(1)解：$f'(x)=e^x-a$ ---1 分

①当$a\le0$时，$f'(x)>0$恒成立，所以函数$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,+\infty)$.-------2 分

②当$a>0$时，令$f'(x)>0$，$x>\ln a$，所以函数$f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上单调递增，

令$f'(x)<0$，$x<\ln a$，所以函数$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减.

综上，当$a\le0$时，函数$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,+\infty)$；

当$a>0$时，函数$f(x)$的单调减区间为$(-\infty,\ln a)$，单调增区间为$(\ln a,+\infty)$.-------4 分

（2）若$\frac{f(x)}{x}\ge a(x\ln x+1-x)$，即$\frac{e^x}{x^2}\ge a(\ln x+\frac{2}{x}-1)$

构造$g(x)=\frac{e^x}{x^2}-a(\ln x+\frac{2}{x}-1)$.从而原问题等价于$g(x)\ge0$恒成立，----------------5 分

$g'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}-a(\dfrac{x-2}{x^2})$

$g'(x)=\dfrac{(x-2)}{x^3}(e^x-ax)$--6 分

①当 $a>e$ 时，由于 $g(1)=e-a<0$，与 $g(x)\ge 0$ 矛盾，故不符合题意.------------- 7 分

②(i)当 $a\le 0$ 时，显然 $e^x-ax>0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，-----------------------------8 分

(ii)当 $0<a\le e$ 时，由（1）知函数 $f(x)=e^x-ax$ 此时有极小值 $f(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)\ge 0$.

--9 分

从而有：当 $a\le e$ 时 $e^x-ax\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立------------------------------10 分

此时 $g'(2)=0$，且 $x\in(0,2)$，$g'(x)<0$；$x\in(2,+\infty)$，$g'(x)>0$.

$g(x)$ 的极小值即最小值为 $\dfrac{e^2}{4}-a\ln 2\ge 0$，解得 $a\le\dfrac{e^2}{4\ln 2}<e$，---------------- -11 分

综上，a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{e^2}{4\ln 2}\right]$.------------------------------.---------- -. 12 分

22. 解：（1）由极坐标与直角坐标得互化公式：$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$-----.------------------- -. 1 分

由 $\rho^2=4\rho\cos\theta+5$ 得 $x^2+y^2=4x+5$，-----.--- ---. 3 分

即 $(x-2)^2+y^2=9$，曲线 C 的直角坐标方程 $(x-2)^2+y^2=9$.------.-----------------------------5 分

（2）将直线的参数方程代入曲线 C 的普通坐标方程并整理得 $5t^2-16\sqrt{5}t+35=0$，---------------7 分

设 A，B 的对应的参数分别是 t_1,t_2 则 $t_1+t_2=\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$，$t_1t_2=7$，则 $t_1>0,t_2>0$，---------------------8 分

$\because P(-2,0)$，则直线 l 过 P，由直线参数方程的几何意义得，$|PA|=|t_1|$，$|PB|=|t_2|$，

$\therefore \dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\dfrac{16\sqrt{5}}{35}$ --10 分

23.解：(1)当 $a=1$ $f(x)=\begin{cases}2x+4, x\le -1,\\ 2, -1<x\le 2,\\ -2x+6, x>2.\end{cases}$ --3 分

可得 $f(x)\ge 0$ 的解集为 $\{x|-2\le x\le 3\}$. ---5 分

(2) $f(x)\leqslant 1$ 等价于 $|x+a|+|x-2|\ge 4$. --7 分

而 $|x+a|+|x-2|\ge|a+2|$，且当 $x=2$ 时等号成立. ---------------------------------------8 分

故 $f(x)\leqslant 1$ 等价于 $|a+2|\ge 4$---9 分

由 $|a+2|\ge 4$ 可得 $a\le -6$ 或 $a\ge 2$

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$.---10 分