

2020-2021 学年度第二学期期末学业水平诊断

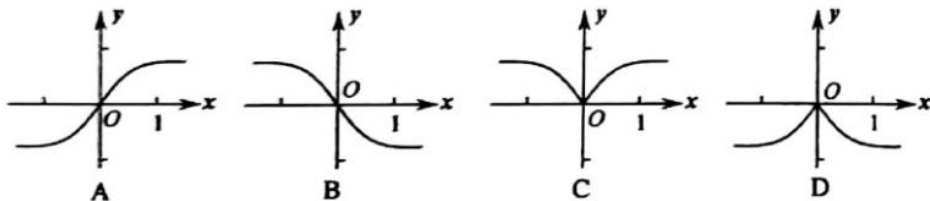
高二数学

注意事项:

1. 本试题满分 150 分, 考试时间为 120 分钟。
2. 答卷前, 务必将姓名和准考证号填涂在答题卡上。
3. 使用答题纸时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写, 要字迹工整, 笔迹清晰; 超出答题区书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | -1 < x < 3\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$
 A. $\{x | x < 3\}$ B. $\{x | 1 < x < 3\}$ C. $\{x | x \geq 1\}$ D. $\{x | 1 \leq x < 3\}$
2. “ $\frac{1}{x} < 1$ ” 是 “ $x > 1$ ” 的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ f(x-1), & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(2021) =$
 A. 2 B. 1 C. 0 D. 不确定
4. 函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{x^2 + 1}$ 的图象可能为



5. 若函数 $f(x) = ax^2 - \frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是
 A. $[0, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ D. $(-\infty, -\frac{1}{2})$

高二数学试题 (第 1 页, 共 4 页)

6. 某种放射性物质在其衰变过程中, 每经过一年, 剩余质量约是原来的 $\frac{2}{3}$. 若该物质的剩余质量变为原来的 $\frac{1}{4}$, 则经过的时间大约为 ($\lg 2 \approx 0.301, \lg 3 \approx 0.477$)
- A. 2.74 年 B. 3.42 年 C. 3.76 年 D. 4.56 年

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ x+2, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $f(m) = f(n)$ 且 $n < m$, 则 $m-n$ 的最小值为

- A. 2 B. 3 C. $e^2 - 1$ D. e^2
8. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(-1) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 则不等式 $(2^x - 1)f(x) > 0$ 的解集为
- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的有

- A. “ $\forall x \in (0, +\infty), 2^x > 1$ ” 的否定为 “ $\exists x \in (0, +\infty), 2^x \leq 1$ ”
B. “ $\forall x \in (0, +\infty), 2^x > 1$ ” 的否定为 “ $\exists x \in (-\infty, 0], 2^x \leq 1$ ”
C. “ $\exists x > 0, x^2 - x - 1 > 0$ ” 的否定为 “ $\forall x > 0, x^2 - x - 1 \leq 0$ ”
D. “ $\exists x > 0, x^2 - x - 1 > 0$ ” 的否定为 “ $\forall x \leq 0, x^2 - x - 1 \leq 0$ ”

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x}$, $g(x) = \lg(\sqrt{x^2+1}-x)$, 则

- A. 函数 $f(x)$ 为偶函数
B. 函数 $g(x)$ 为奇函数
C. 函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 0
D. 设 $F(x) = f(x) + g(x)$, 则 $F(2a) + F(-1-a) < 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = |x-a| (a \in \mathbf{R})$, 则

- A. $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减
B. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称
C. 若方程 $f(x) = g(x)$ 仅有 1 个实数根, 则 $0 < a < 4$
D. 当 $a < 0$ 或 $a > 4$ 时, 方程 $f(x) = g(x)$ 有 3 个实数根

高二数学试题 (第 2 页, 共 4 页)

12. 若函数 $g(x)$ 在区间 D 上有定义, 且对 $\forall a, b, c \in D$, $g(a), g(b), g(c)$ 均可作为一个三角形的三边长, 则称 $g(x)$ 在区间 D 上为“M 函数”. 已知函数 $f(x) = \frac{x-1}{x} - \ln x + k$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上为“M 函数”, 则实数 k 的值可能为
- A. $4-e$ B. $e-1$ C. $2e-5$ D. $\frac{1}{4}e^2$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数 $f(x) = \sqrt{1 - \log_2 x}$ 的定义域为
14. 已知 $f(x) = \begin{cases} -7x + 2a, & x \geq 1 \\ x^2 - ax + 1, & x < 1 \end{cases}$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, 则实数 a 的取值范围为
15. 若函数 $y = 2e^x - 3$ 在 $x = 0$ 处的切线与 $y = \ln x + ax$ 的图象相切, 则实数 a 的值为
16. 已知函数 $f(x) = a - x^2$ ($0 < x < \sqrt{a}$) 在其图象上任意一点 $P(t, f(t))$ 处的切线, 与 x 轴、 y 轴的正半轴分别交于 M, N 两点, 设 $\triangle OMN$ (O 是坐标原点) 的面积为 $S(t)$, 当 $t = t_0$ 时, $S(t)$ 取得最小值, 则 $\frac{\sqrt{a}}{t_0}$ 的值为

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x - \sin x$.
- (1) 当 $x < 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 解关于 m 的不等式 $f(2m) > f(m-1)$.
18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值;
- (2) 讨论方程 $f(x) = a$ ($a \in \mathbf{R}$) 实数解的个数.
19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(4^x + k \cdot 2^x + 1)$ ($k \in \mathbf{R}$), $g(x) = x \ln 2$.
- (1) 若 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 求 k 的取值范围;
- (2) 若不等式 $f(x) < g(x)$ 有解, 求 k 的取值范围.

高二数学试题 (第 3 页, 共 4 页)

20. (12分) 如图, 将一张长为 a 、宽为 $\frac{5}{8}a$ 的矩形铁皮的四角分别截去一个大小相同的小正方形, 然后折起, 可以做成一个无盖长方体容器. 设截去的小正方形的边长为 x , 所得容器的体积为 V .

(1) 将 V 表示为 x 的函数 $V(x)$;

(2) x 为何值时, 容积 V 最大? 求出最大容积.



21. (12分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - x + m$ ($m \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $y = f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方, 求 m 的取值范围;

(2) 若存在正数 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = xe^{-x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 令 $g(x) = \frac{a}{f(x)} + \ln f(x)$ ($a \in \mathbf{R}$), 对任意 $x \geq 1$, $g(x) \geq -1$.

求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

