

# 昆明一中 2023 届高三第九次联考 数学参考答案

命题、审题组教师 杨昆华 彭力 顾先成 莫利琴 孙思应 梁云虹 丁茵 张远雄 崔锦 秦绍卫

## 一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	C	B	D	C	D

1. 解析: 依题意  $A \cap B$  表示直线  $x + y = 1$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  的交点的集合, 则  $A \cap B = \{(0,1), (1,0)\}$ , 所以  $A \cap B$  的真子集个数为  $2^2 - 1 = 3$  个. 选 C.

2. 解析: 依题意  $z = \frac{1+i}{1-i} = i$ , 所以  $z^2 = -1$ ,  $z^3 = -i$ ,  $z^4 = 1$ , 则  $z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ ,

所以  $z + z^2 + z^3 + \dots + z^{2023} = 505(z + z^2 + z^3 + z^4) + z + z^2 + z^3 = -1$ . 选 A.

3. 解析: 令  $x = -1$  得  $a_0 = 1$ , 所以选 B.

4. 解析: 据题意, 四边形  $AF_1BF_2$  是矩形, 设  $|AF_1| = m, |AF_2| = n$ , 则有  $m+n=10, m^2+n^2 = (2c)^2 = 64$ ,

由此可得  $mn = 18$ , 所以  $\triangle AF_1F_2$  的面积是  $\frac{1}{2}mn = 9$ , 又  $\triangle ABF_1$  的面积与  $\triangle AF_1F_2$  的面积相等,

所以  $\triangle ABF_1$  的面积等于 9, 选 C.

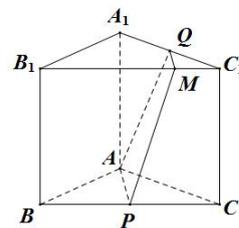
5. 解析: 依题意  $\overline{OM} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2}$ , 所以  $|\overline{OM}|^2 = (2\overline{e_1} - \overline{e_2})^2 = 5 - 4\overline{e_1} \cdot \overline{e_2} = 5 - 2 = 3$ , 所以  $|\overline{OM}| = \sqrt{3}$ . 选 B.

6. 解析: 由  $f(x) - f(2-x) = 0$ , 可知函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称;  $f'(x) + f'(2-x) = 0$ , 可知函

数  $f'(x)$  的图象关于点  $(1,0)$  对称, 所以 ABC 错误, D 正确, 选 D.

7. 解析: 如图, 截面为直角梯形  $APQM$ , 且  $AB \perp AC$ , 由题  $BC = 4, QM = 1$ ,

$PM = 3$ , 所以  $S_{\text{梯形}APQM} = \frac{1}{2}(QM + AP)PM = \frac{1}{2} \times (2+1) \times 3 = \frac{9}{2}$ , 选 C.



8. 解析: 构造函数  $f(x) = e^x - \ln x$ , 得  $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ , 由图象知  $f'(x)$  在  $(0,1)$  上有一个极值点,  $f(x)$  在

$(0,1)$  上不是单调函数, 故无法判断  $f(x_1)$  与  $f(x_2)$  的大小, 所以 AB 错误; 构造函数  $g(x) = \frac{e^x}{x}$ , 得

$g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ,  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,  $g(x_3) < g(x_4)$ , 即  $\frac{e^{x_3}}{x_3} < \frac{e^{x_4}}{x_4}$ ,  $x_3e^{x_4} > x_4e^{x_3}$ , D 正确,

选 D.

## 二、多选题

题号	9	10	11	12
答案	BD	ACD	ABD	BCD

9. 解析：若  $\alpha // \beta$ ，则  $m$  可能与  $n$  异面，A 错误；

由  $\alpha \cap \gamma = m$ ， $\beta \cap \gamma = n$ ， $m // \beta$  可知， $m // n$ ，B 正确；

由  $\alpha \perp \beta$ ，则  $m$  可能与  $n$  平行，C 错误；

由  $\alpha \cap \beta = l$ ， $m \perp l$ ， $n \perp l$ ， $m \perp n$ ， $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，由直二面角的定义可知  $\alpha \perp \beta$ ，D 正确，选 BD.

10. 解析：由  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}$ ，

$g(x) = 8\left[f(x) - \frac{3}{4}\right] = 2\cos 4x$ ，结合函数的图象，知 B 错误，ACD 正确，选 ACD.

11. 解析：由  $x^3 - mx - n = 0$ ，化为  $x^3 - mx = n$ ，设  $g(x) = x^3 - mx$ ，问题转化为函数  $g(x) = x^3 - mx$  的图象

与直线  $y = n$  有且只有一个公共点.  $g'(x) = 3x^2 - m$ ，当  $m \leq 0$  时  $g'(x) \geq 0$ ， $g(x) = x^3 - mx$  在  $\mathbf{R}$  上单调

递增， $g(x) = x^3 - mx$  的图象与直线  $y = n$  有且只有一个公共点；当  $m > 0$  时， $x < -\sqrt{\frac{m}{3}}$  时， $g'(x) > 0$ ，

函数  $g(x)$  单调递增； $-\sqrt{\frac{m}{3}} < x < \sqrt{\frac{m}{3}}$  时， $g'(x) < 0$ ，函数  $g(x)$  单调递减； $x > \sqrt{\frac{m}{3}}$  时， $g'(x) > 0$ ，函

数  $g(x)$  单调递增.  $x \rightarrow -\infty$  时， $g(x) \rightarrow -\infty$ ； $x \rightarrow +\infty$  时， $g(x) \rightarrow +\infty$ ；极大值为  $g\left(-\sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ ，极小值

为  $g\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ ，结合选项  $m = 3$ ，函数  $g(x) = x^3 - mx$  的极大值为  $g(-1) = 2$ ，极小值为  $g(1) = -2$ ，由函数的

图象，知 C 错误；ABD 正确，选 ABD.

12. 解析：由于牟合方盖可以由两个直径相等且相互垂直的圆柱体相交得到的，故只要用水平面去截它们，那么所得的截面为正方形，A 错误；

根据祖暅原理，图 2 中正方体与“牟合方盖”的八分之一之间空隙的截面面积与图 3 中正四棱锥中阴影部分的面积相等，B 正确；

由于牟合方盖可以由两个直径相等且相互垂直的圆柱体相交得到的，存在内切球，且只要用水平面去截它们，那么所得的正方形和圆，也是相切在一起的，对于直径为  $2r$  的球和高为  $2r$  的牟合方盖来说，使用同一高度处的水平面来截它们，所得的截面积之比正好总是相切的圆和正方形的面积之比，也就是  $\pi:4$ ，C 正确；

由图中正方体与牟合方盖的八分之一之间空隙的体积与正四棱锥体的体积相等；而正四棱锥体的体积为  $V_{\text{倒棱锥}} = \frac{1}{3}r^3$ 。所以，八分之一牟合方盖的体积等于正方体的体积减去正四棱锥的体积：

$$V_{\frac{1}{8}\text{牟合方盖}} = r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{2}{3}r^3, \text{ 从而得到整个牟合方盖的体积为 } 8 \times \frac{2}{3}r^3 = \frac{16}{3}r^3, \text{ D 正确, 选 BCD.}$$

### 三、填空题

13. 解析：由正态曲线的对称轴是  $\mu=25$  知， $P(24 < X < 25) = P(25 < X < 26)$ ，  
 $P(25 < X < 27) = P(23 < X < 25)$ ，所以  $P(24 < X < 27) = P(24 < X < 25) + P(25 < X < 27)$   
 $= P(25 < X < 26) + P(23 < X < 25) = P(23 < X < 26)$  即  $P(24 < X < 27) = 0.4$ 。

14. 解析：由  $a_{n+1} = \frac{a_n}{3-a_n}$  得： $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3-a_n}{a_n} = \frac{3}{a_n} - 1$ ，即  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{2}\right)$ ，所以

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{2}\right) 3^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}, \text{ 所以 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2} = \frac{3^{n-1} + 1}{2}, a_n = \frac{2}{3^{n-1} + 1} (n \in \mathbf{N}^*).$$

15. 解析：小张从  $M$  处出发选择最短路径到达  $N$  处，需要向右走 6 条街道和向上走 4 条街道，共走 10 条街道，若把向右走一条街记为数字 1，向上走一条街记为数字 2，则 1111112222 和 2112111212 分别是所有走法中的其中两种，即 1 种走法对应于 10 个位置其中的 6 个位置摆放 1，其余 4 个位置摆放 2。所以从  $M$  处出发选择最短路径到达  $N$  处一共有  $C_{10}^6 = 210$  种走法。同理，从  $M$  处到达  $P$  处有  $C_6^4 = 15$  种

走法，从  $P$  处到达  $N$  处有  $C_4^2 = 6$  种走法，所以根据古典概型的概率知识，小张每天早上上班途经街道  $P$  处的概率是  $\frac{15 \times 6}{210} = \frac{3}{7}$ 。

16. 解析： $|x_1 + y_1 - 4\sqrt{2}| + |x_2 + y_2 - 4\sqrt{2}| = \sqrt{2} \left( \frac{|x_1 + y_1 - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} \right)$ ，其几何意义是  $P(x_1, y_1)$ ，

$Q(x_2, y_2)$  两点到直线  $l: x + y - 4\sqrt{2} = 0$  的距离之和的  $\sqrt{2}$  倍。据题意， $\triangle POQ$  是边长为  $2\sqrt{3}$  的等边三角形，设动点  $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$  的中点为  $M(x, y)$ ，则  $|OM| = 3$ ，即中点  $M(x, y)$  的轨迹是圆  $x^2 + y^2 = 9$ ，

所以  $M(x, y)$  到直线  $l: x + y - 4\sqrt{2} = 0$  的距离为  $d$  的最小值等于  $\frac{|-4\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} - 3 = 1$ 。

所以  $|x_1 + y_1 - 4\sqrt{2}| + |x_2 + y_2 - 4\sqrt{2}| = \sqrt{2} \left( \frac{|x_1 + y_1 - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2}d \geq 2\sqrt{2}$ ，

即  $|x_1 + y_1 - 4\sqrt{2}| + |x_2 + y_2 - 4\sqrt{2}|$  的最小值是  $2\sqrt{2}$ 。

#### 四、解答题

17. (1) 证明: 由  $PA \perp$  平面  $ABC$ , 得  $PA \perp BC$ , 又  $\angle ABC = 90^\circ$  可得  $AB \perp BC$ ,

又  $PA \cap AB = A$ ,  $PA \subset$  平面  $PAB$ ,  $AB \subset$  平面  $PAB$ , 所以  $BC \perp$  平面  $PAB$ ,

又  $BC \subset$  平面  $PBC$ , 所以平面  $PBC \perp$  平面  $PAB$ ; .....4 分

(2) 如图, 以  $B$  为原点,  $BC, BA$  所在直线分别为  $x, y$  轴建立直角坐标系, 设  $PA = 2$ , 则  $B(0,0,0), C(2,0,0), A(0,2,0), P(0,2,2)$ ,

因为  $\overrightarrow{PF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$ , 得  $F(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ , 同理可得  $E(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ,

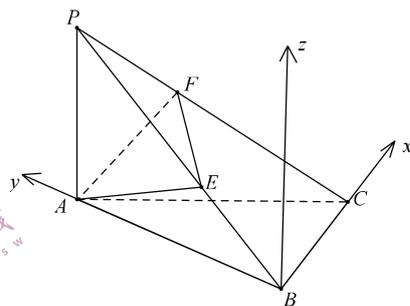
$\overrightarrow{AE} = (0, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $\overrightarrow{AF} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ ,

平面  $AEF$  的一个法向量为  $\vec{m} = (-3, 1, 2)$ ,

平面  $ABC$  的一个法向量为  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ ,

设平面  $AEF$  与平面  $ABC$  夹角为  $\theta$ , 则  $\cos \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{2}{1 \cdot \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$ ,

综上, 平面  $AEF$  与平面  $ABC$  夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{14}}{7}$ . .....10 分



18. 解: (1) 设  $\triangle ABC$  的内切圆半径为  $r$ ; 因为  $S_1^2 + S_3^2 - S_1 S_3 = S_2^2$ ,

所以  $(\frac{1}{2}ar)^2 + (\frac{1}{2}cr)^2 - (\frac{1}{2}ar) \cdot (\frac{1}{2}cr) = (\frac{1}{2}br)^2$ , 化简得:  $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ ,

所以  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$ , 因为  $B \in (0, \pi)$ , 所以  $B = \frac{\pi}{3}$ , 所以  $A + C = \frac{2\pi}{3}$ ,

因为  $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ , 所以  $AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sin C}$ , 因为  $\triangle ABC$  为锐角三角形,

所以  $0 < C < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2}$ , 解得:  $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$ ,

所以  $AC$  的取值范围为  $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ . ..... 6 分

(2) 选择①, 因为  $4 \sin B \sin A + \cos 2A = 1$ , 所以  $4 \sin B \sin A = 1 - \cos 2A = 2 \sin^2 A$ ,

因为  $\sin A \neq 0$ , 所以  $\sin A - 2 \sin B = 0$ , 所以  $a = 2b$ ,

由 (1) 知  $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ ,  $c = 2$ , 所以  $4b^2 + 4 - b^2 = 4b$ , 整理得  $3b^2 - 4b + 4 = 0$ , 方程无实数解, 所以  $\triangle ABC$  不存在. ....12 分

选择②, 由  $\frac{1 - 2 \cos A}{\sin A} + \frac{1 - 2 \cos B}{\sin B} = 0$  得:  $\sin A + \sin B - 2(\sin A \cos B + \cos A \sin B) = 0$ , 所以

$\sin A + \sin B = 2 \sin(A + B)$ , 即  $\sin A + \sin B = 2 \sin C$ , 所以  $a + b = 2c = 4$ ,

由 (1) 知  $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ ,  $c = 2$ ,

所以  $a^2 + 4 - b^2 = 2a$ , 所以  $a^2 + 4 - (4 - a)^2 = 2a$ , 解得  $a = b = 2$ , 所以  $\triangle ABC$  存在且唯一,  $\triangle ABC$  的

面积  $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ . .....12 分

选择③, 因为  $a \cos C + c \cos A = 1$ , 所以  $a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b = 1$ ,

由(1)知  $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ ,  $c = 2$ , 所以  $a^2 + 4 - 1 = 2a$ , 整理得  $a^2 - 2a + 3 = 0$ , 方程无实数解, 所以  $\triangle ABC$  不存在. ....12 分

19. 解: (1) 由  $a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$ , 得  $S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$ ,

因为  $S_n > 0$ , 所以  $\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = 1$ ,

所以  $\{\sqrt{S_n}\}$  是以  $\sqrt{S_1} = 1$  为首项, 1 为公差的等差数列, 所以  $\sqrt{S_n} = 1 + (n-1) = n$ ,

所以, 当  $n \geq 2$  时,  $a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = n + n - 1 = 2n - 1$ ,

当  $n = 1$  时,  $a_1 = 1$  也满足上式,

所以数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2n - 1$ . .....6 分

(2) 由  $b_{n+1} - b_n = 2^{n-1} \cdot a_n = (2n-1) \cdot 2^{n-1}$  知:

当  $n \geq 2$  时,  $b_n = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1})$ ,

$$= 1 + 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + \dots + (2n-3) \cdot 2^{n-2} \quad \text{①},$$

则  $2b_n = 2 + 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + (2n-3) \cdot 2^{n-1} \quad \text{②},$

由①-②得:  $-b_n = 2(2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-2}) - (2n-3) \cdot 2^{n-1} = 2 \frac{2(2^{n-2}-1)}{2-1} - (2n-3) \cdot 2^{n-1}$ ,

化简得:  $b_n = (2n-5) \cdot 2^{n-1} + 4 \quad (n \geq 2)$ ,

当  $n = 1$  时,  $b_1 = 1$  也满足上式,

所以数列  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = (2n-5) \cdot 2^{n-1} + 4$ . ....12 分

20. 解析 (1)  $Y$  的可能取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(Y=0) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}; \quad P(Y=1) = \frac{C_3^2 \cdot C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{21}{120}; \quad P(Y=2) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{63}{120}; \quad P(Y=3) = \frac{C_3^0 \cdot C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120}.$$

所以  $Y$  的分布列如下:

$Y$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{120} + 1 \times \frac{21}{120} + 2 \times \frac{63}{120} + 3 \times \frac{35}{120} = \frac{21}{10} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P(X \leq 6) &= 1 - P(X = 7) - P(X = 8) - P(X = 9) - P(X = 10) \\ &= 1 - C_{10}^7 \times (0.9)^7 \times (0.1)^3 - C_{10}^8 \times (0.9)^8 \times (0.1)^2 - C_{10}^9 \times (0.9)^9 \times (0.1)^1 - C_{10}^{10} \times (0.9)^{10} \\ &\approx 0.013 \end{aligned}$$

0.013 概率非常小，因此中奖人数不超过 6 人是小概率事件，在一次试验中几乎不可能发生，而现在发生了，从这个角度，就可以怀疑商场是虚假宣传。

换一个角度，因为样本数据较少，中奖人数不超过 6 人是一个随机事件，在一次试验中可能发生，所以从这个角度也可以不怀疑商场的宣传。 \dots\dots\dots 12 分

21. 解：(1)  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ， $f(x) = \frac{ax \ln x}{x+1} - x$  .

$$f'(x) = \frac{(ax \ln x)' \cdot (x+1) - ax \ln x}{(x+1)^2} - 1 = \frac{a(\ln x + x + 1)}{(x+1)^2} - 1,$$

$$f'(1) = \frac{a}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \text{ 得 } a = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} - x, \text{ 由 } f(x) + g(x) < 0, \text{ 得 } \frac{x \ln x}{x+1} - x + \frac{x \ln x}{x-1} + bx < 0,$$

$$\text{即 } \frac{2x \ln x}{x^2 - 1} + b - 1 < 0, \text{ 因为 } x > 1$$

$$\text{所以 } \frac{2x}{x^2 - 1} \left( \ln x + \frac{(b-1)(x^2 - 1)}{2x} \right) < 0 \Leftrightarrow \ln x + \frac{(b-1)(x^2 - 1)}{2x} < 0.$$

$$\text{令 } h(x) = \ln x + \frac{(b-1)(x^2 - 1)}{2x}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{(b-1)(x^2 + 1)}{2x^2} = \frac{(b-1)x^2 + 2x + b - 1}{2x^2}$$

当  $b \geq 1$  时，此时  $h'(x) > 0$ ，故  $h(x)$  是增函数。而  $h(1) = 0$ ，故当  $x \in (1, +\infty)$  时， $h(x) > 0$ ，不合题意，舍去。

当  $b < 1$  时，研究函数  $p(x) = (b-1)x^2 + 2x + b - 1$ ，二次函数开口向下，

$$\text{令 } \Delta = 4 - 4(b-1)^2 \geq 0, \text{ 解得 } 0 \leq b \leq 2.$$

① 若  $0 < b < 1$ ，则  $p(x) = 0$  的两根之积  $x_1 x_2 = 1$ ，不妨令  $x_1 < x_2$ ，则  $x_2 > 1$ 。

故当  $x \in (1, x_2)$  时， $p(x) > 0$ ， $h'(x) > 0$ ，故  $h(x)$  是增函数，而  $h(1) = 0$ ，

故当  $x \in (1, x_2)$  时， $h(x) > 0$ ，不合题意，舍去。

② 若  $b \leq 0$  时，则  $p(x) < 0$ ，此时  $h'(x) < 0$ ，故  $h(x)$  是减函数，而  $h(1) = 0$ ，

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $h(x) < 0$ , 符合题意.

综上所述,  $b$  的取值范围是  $(-\infty, 0]$ . .....12 分

22. 解: (1) 由题意知, 当  $x_0 = 1$  时,  $y_0 = \pm \frac{3}{2}$ , 所以  $P(1, \frac{3}{2})$  或  $P(1, -\frac{3}{2})$

由定义可知椭圆  $C$  在点  $P(x_0, y_0)$  处的极线方程为  $\frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{3} = 1$ ,

所以椭圆  $C$  在点  $P(1, \frac{3}{2})$  处的极线方程为  $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ , 点  $P(1, -\frac{3}{2})$  处的极线方程为  $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$ ,

..... 4 分

证明: (2) 由定义可知椭圆  $C$  在点  $P(x_0, y_0)$  处的极线方程为  $\frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{3} = 1$ ,

当  $y_0 = 0$  时,  $x_0 = \pm 2$ , 此时极线方程为  $x = \pm 2$ , 所以  $P$  处的极线就是过点  $P$  的切线.

当  $y_0 \neq 0$  时, 极线方程为  $\frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{3} = 1 \Rightarrow y = -\frac{3x_0}{4y_0}x + \frac{3}{y_0}$ .

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{3x_0}{4y_0}x + \frac{3}{y_0}, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{9x_0^2}{4y_0^2} + 3\right)x^2 - \frac{18x_0}{y_0}x + \frac{36}{y_0^2} - 12 = 0.$$

$$\Delta = \left(\frac{18x_0}{y_0}\right)^2 - 4\left(\frac{9x_0^2}{4y_0^2} + 3\right)\left(\frac{36}{y_0^2} - 12\right) = \frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{9y_0^2} = 0.$$

综上所述, 椭圆  $C$  在点  $P$  处的极线就是过点  $P$  的切线; ..... 8 分

(3) 设点  $Q(x_0, y_0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 由 (1) 可知

过点  $M$  的切线方程为  $l_1: \frac{x_1 x}{4} + \frac{y_1 y}{3} = 1$ , 过点  $N$  的切线方程为  $l_2: \frac{x_2 x}{4} + \frac{y_2 y}{3} = 1$ .

因为  $l_1, l_2$  都过点  $Q(x_0, y_0)$ , 所以有  $\begin{cases} \frac{x_1 x_0}{4} + \frac{y_1 y_0}{3} = 1, \\ \frac{x_2 x_0}{4} + \frac{y_2 y_0}{3} = 1, \end{cases}$  则割线  $MN$  的方程为  $l_0: \frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{3} = 1$ ;

同理可得过点  $P(-4, 0)$  的两条切线的切点弦  $XY$  的方程为  $l_3: \frac{-4x}{4} = 1 \Rightarrow x = -1$ .

又因为割线  $MN$  过点  $P(-4, 0)$ , 所以  $\frac{-4x_0}{4} = 1 \Rightarrow x_0 = -1$ .

所以  $Q, X, Y$  三点共线, 都在直线  $x = -1$  上. .... 12 分