宝安区 2023-2024 参考答案

一、选择题

1．D　2．A　3．C　4．D　5．C　6．C　7．D　8．A

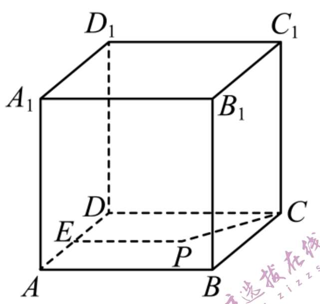
二、多选题

9．AC　10．ABD 11．BCD　12．ABD

三、填空题

13．216 14．264 15．$\left[\frac{11}{4},4\right]$

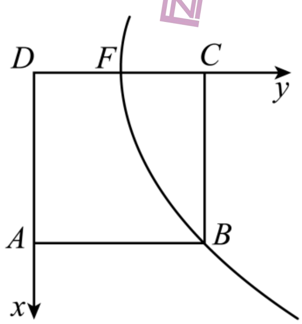
16．$\left[\frac{4}{3},2\right]$【详解】根据题意可知，连接 PC，在底面 $ABCD$ 内作 $PE\perp AD$ 于点 E，如下图所示：



由正方体性质可知 PC 即为 P 到直线 CC_1 的距离，PE 为 P 到平面 ADD_1A_1 的距离，所以 $PC=PE$；

在底面 $ABCD$ 内，由抛物线定义可知点 P 的轨迹是以 C 为焦点，AD 为准线的抛物线的一部分，

截取底面 $ABCD$，分别以向量 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}$ 为 x,y 轴的正方向建立平面直角坐标系，如下图所示：



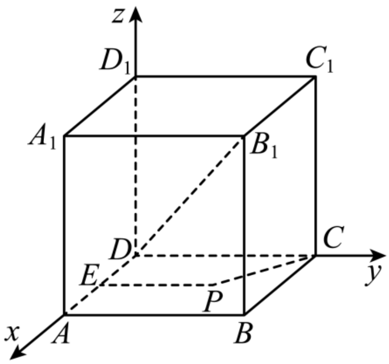
又正方形边长为 2，易知抛物线过点 $B(2,2)$，$F(0,1)$，且对称轴为 y 轴，

设抛物线方程为 $y=ax^2+b$，代入两点坐标可得 $\begin{cases}4a+b=2\\0+b=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=1\end{cases}$

所以 P 的轨迹抛物线方程为 $y=\frac{1}{4}x^2+1(0\le x\le 2)$，

以 D 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

如下图所示：



则 $A(2,0,0),B_1(2,2,2),D_1(0,0,2)$，所以 $\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2),\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，

设 $P\left(m,\frac{1}{4}m^2+1,0\right)$，平面 AB_1D_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\vec{n}=2y+2z=0\\ \overrightarrow{AD_1}\cdot\vec{n}=-2x+2z=0\end{cases}$，令 $z=1$，解得 $x=1,y=-1$，即 $\vec{n}=(1,-1,1)$；

$\overrightarrow{AP}=\left(m-2,\frac{1}{4}m^2+1,0\right)$，

则点 P 到平面 AB_1D_1 的距离为 $d=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|m-2-\frac{1}{4}m^2-1\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\left|-\frac{1}{4}m^2+m-3\right|}{\sqrt{3}}$，

令 $y=-\frac{1}{4}m^2+m-3(0\le m\le 2)$，易得 $y\in[-3,-2]$，

所以 $d=\frac{\left|-\frac{1}{4}m^2+m-3\right|}{\sqrt{3}}\in\left[\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$，

易知在三棱锥 $P-AB_1D_1$ 中，底面 AB_1D_1 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正三角形，

所以 $S_{\triangle AB_1D_1}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

所以三棱锥 $P-AB_1D_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle AB_1D_1}\cdot d=\frac{2\sqrt{3}}{3}d\in\left[\frac{4}{3},2\right]$；

即三棱锥 $P-AB_1D_1$ 体积的取值范围为 $\left[\frac{4}{3},2\right]$.

故答案为：$\left[\frac{4}{3},2\right]$

四、解答题

17.（1）因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$，得 $bc\cos A=-1$①，

又因为△ABC 的面积为 $\sqrt{2}$，所以有 $\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{2}$②，

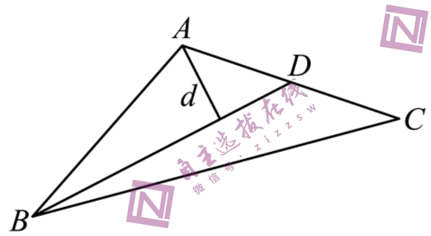
显然 $\cos A\neq 0$，由①②得 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=-2\sqrt{2}$，（3 分）

所以 $\cos A=-\frac{1}{3},\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，代入 $bc\cos A=-1$ 得 $bc=3$，

在△ABC 中，因为 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A, a=2\sqrt{2}$，

所以 $b^2+c^2=6$，得 $b+c=\sqrt{b^2+c^2+2bc}=2\sqrt{3}$，

所以△ABC 的周长为 $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.（5 分）



（2）因为 D 为 AC 边上的中点，所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{BD}^2=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=c^2+\frac{1}{4}b^2+1$，

因为 $c^2+\frac{1}{4}b^2\geq 2\sqrt{c^2\cdot\frac{1}{4}b^2}=bc=3$，当且仅当 $c=\frac{1}{2}b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时取等号，

所以 $BD^2=c^2+\frac{1}{4}b^2+1\geq 4$.（7 分）

设点 A 到直线 BD 距离为 d，

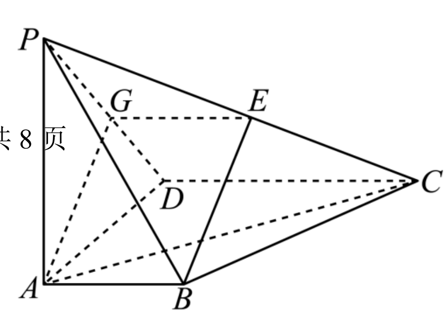
因为 $S_{\triangle ABD}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}BD\cdot d$，所以 $d=\frac{\sqrt{2}}{BD}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即点 A 到直线 BD 距离最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.（10 分）

18.（1）在 PD 上找中点 G，连接 AG，EG，如图：

∵ G 和 E 分别为 PD 和 PC 的中点，

∴ $EG//CD$，且 $EG=\frac{1}{2}CD$，（2 分）



又∵底面 $ABCD$ 是直角梯形，

$CD=2AB$， $AB//CD$，

∴ $AB//GE$ 且 $AB=GE$． 即四边形

$ABEG$ 为平行四边形，

∴ $AG//BE$，

∵ $AG\subset$平面 PAD， $BE\not\subset$ 平面 PAD，

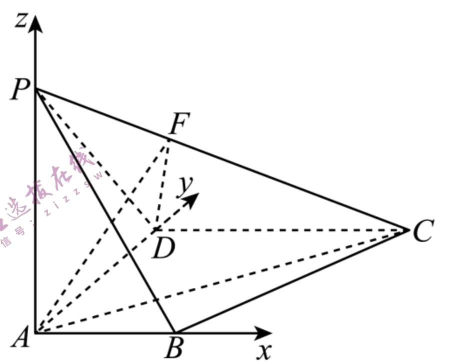
∴ $BE//$平面 PAD；（6 分）

（2）因为 $PA\perp$平面 $ABCD$， $AB,AD\subset$平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AB,PA\perp AD$， 又 $AB\perp AD$，

以 A 为原点，以 AB 所在直线为 x 轴，

AD 所在直线为 y 轴，AP 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



可得 $B(1,0,0)$， $C(2,2,0)$， $D(0,2,0)$，

$P(0,0,2)$， $\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$，(7 分)

由 F 为棱 PC 上一点，设

$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda),0\le\lambda\le1$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}=(2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$， $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$

设平面 FAD 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}2\lambda a+2\lambda b+(2-2\lambda)c=0\\2b=0\end{cases}$， 解得：$b=0$，

令 $c=\lambda$，则 $a=\lambda-1$，则 $\vec{n}=(\lambda-1,0,\lambda)$，

取平面 ADC 的法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，

则二面角 $F-AD-C$ 的平面角 α 满足：

$$|\cos\alpha|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|\lambda|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\text{,(10 分)}$$

解得：$8\lambda^2+2\lambda-1=0$，解得：$\lambda=\frac{1}{4}$ 或 $\lambda=-\frac{1}{2}$（舍去），

故存在满足条件的点 F，此时 $\frac{PF}{PC}=\frac{1}{4}$．（12 分）

19．（1）因为 $f(x)=a(\ln x+a)-x$，所以 $f'(x)=\frac{a}{x}-1$，（2 分）

当$a\le 0$时，$f'(x)\le 0$，所以$f(x)$的单调减区间是$(0,+\infty)$，

当$a>0$时，$f'(x)=\dfrac{a-x}{x}$.令$f'(x)>0$得$0<x<a$，令$f'(x)<0$得$x>a$，

所以$f(x)$的单调递减区间是$(a,+\infty)$，单调递增区间是$(0,a)$.（6 分）

（2）由（1）可得，当$x=a$时，$f(x)$取得极大值，也是最大值，

所以$f(x)\le f(a)=a(\ln a+a)-a$.

设$g(a)=\ln a-a+1$，则$g'(a)=\dfrac{1}{a}-1$，令$g'(a)>0$得$0<a<1$，令$g'(a)<0$得$a>1$，

所以$g(a)$的单调递减区间是$(1,+\infty)$，单调递增区间是$(0,1)$，8 分

所以$g(a)\le g(1)=0$，即$\ln a\le a-1$.

因为$\ln a\le a-1$，所以$\ln a+a\le 2a-1$，所以$a(\ln a+a)\le 2a^2-a$，

所以$a(\ln a+a)-a\le 2a^2-2a$，所以命题得证.（12 分）

20．(1)解：对于数列$\{a_n\}$，任意$m,n\in N^*$，$a_{n+m}=4^{n+m}=4^n\cdot 4^m=a_n\cdot a_m$，

所以$\{a_n\}$是指数型数列.（5 分）

(2)①数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}+1\right\}$是“指数型数列”，证明如下：

$a_n=2a_na_{n+1}+3a_{n+1}$，$\Rightarrow \dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3}{a_n}+2\Rightarrow \dfrac{1}{a_{n+1}}+1=3\left(\dfrac{1}{a_n}+1\right)$，

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}+1\right\}$是等比数列（3 分），$\dfrac{1}{a_n}+1=\left(\dfrac{1}{a_1}+1\right)\times 3^{n-1}=3^n$，

$\left(\dfrac{1}{a_n}+1\right)\left(\dfrac{1}{a_m}+1\right)=3^n\cdot 3^m=3^{m+n}=\left(\dfrac{1}{a_{n+m}}+1\right)$，故数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}+1\right\}$是“指数型数列”.（8 分）

②由①可得，$a_n=\dfrac{1}{3^n-1}\le \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3^{n-1}}$；

故$T_n\le \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}})=\dfrac{3}{4}(1-\dfrac{1}{3^n})<\dfrac{3}{4}$.（12 分）

21．（1）由分布列知：$p+(p+q)+(p-q)=1$，即 $p=\frac{1}{3}$，

事件 $A_i(i=1,2,3)$ 分别表示I时期没生孩子、生了 1 个女孩、生了 1 个男孩，

事件 B 表示II时期生 2 个孩子，则 $P(B|A_1)=\frac{1}{24},P(B|A_2)=\frac{1}{6},P(B|A_3)=\frac{1}{12}$，

又 $P(A_1)=\frac{1}{5},P(A_2)=P(A_3)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$，

所以 $P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)=p-q=\frac{1}{3}-q$，

即 $\frac{1}{24}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{12}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{3}-q$，则 $q=\frac{9}{40}$，（3 分）

综上，Y 分布列如下：

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{67}{120}$	$\frac{13}{120}$

$E(Y)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{67}{120}+2\times\frac{13}{120}=\frac{31}{40}$.

$D(Y)=\frac{1}{3}\times(0-\frac{31}{40})^2+\frac{67}{120}\times(1-\frac{31}{40})^2+\frac{13}{120}\times(2-\frac{31}{40})^2=\frac{1877}{4800}$.（6 分）

（2）由题意 $S_1^2=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2$，$S_2^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2$，则 $kS_1^2=\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2$，

$mS_2^2=\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2$，

$$S_0^2=\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{z})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{z})^2]=\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x}+\overline{x}-\overline{z})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y}+\overline{y}-\overline{z})^2]$$

$$=\frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^{k}[(x_i-\overline{x})^2+2(x_i-\overline{x})(\overline{x}-\overline{z})+(\overline{x}-\overline{z})^2]+\sum_{i=1}^{m}[(y_i-\overline{y})^2+2(y_i-\overline{y})(\overline{y}-\overline{z})+(\overline{y}-\overline{z})^2]\}$$

$$=\frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2+2(\overline{x}-\overline{z})\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})+k(\overline{x}-\overline{z})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2+2(\overline{y}-\overline{z})\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})+m(\overline{y}-\overline{z})^2\}$$

而 $\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})=\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})=0$，

上式 $=\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2+k(\overline{x}-\overline{z})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2+m(\overline{y}-\overline{z})^2]$

$=\frac{1}{n}[kS_1^2+k(\overline{x}-\overline{z})^2+mS_2^2+m(\overline{y}-\overline{z})^2]$

$=\frac{k}{n}[S_1^2+(\overline{x}-\overline{z})^2]+\frac{m}{n}[S_2^2+(\overline{y}-\overline{z})^2]$，

又 $k+m=n$，且 $a:b=k:m$，

上式 $=\dfrac{a}{a+b}[S_1^2+(\bar{x}-\bar{z})^2]+\dfrac{b}{a+b}[S_2^2+(\bar{y}-\bar{z})^2]$.

综上，$S_0^2=\dfrac{a}{a+b}\left[S_1^2+(\bar{x}-\bar{z})^2\right]+\dfrac{b}{a+b}\left[S_2^2+(\bar{y}-\bar{z})^2\right]$ 得证.（10 分）

由题设知：$E(X)=\dfrac{4}{5}$，$D(X)=\dfrac{4}{25}$，$E(Y)=\dfrac{31}{40}$，$D(Y)=\dfrac{1877}{4800}$，

则总体均值 $\bar{z}=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{7}\times\dfrac{31}{40}=\dfrac{219}{280}$，

综上，题设样本总体的方差

$\dfrac{2}{7}\times[\dfrac{4}{25}+(\dfrac{4}{5}-\dfrac{219}{280})^2]+\dfrac{5}{7}\times[\dfrac{1877}{4800}+(\dfrac{31}{40}-\dfrac{219}{280})^2]\approx 0.3252$.（12 分）

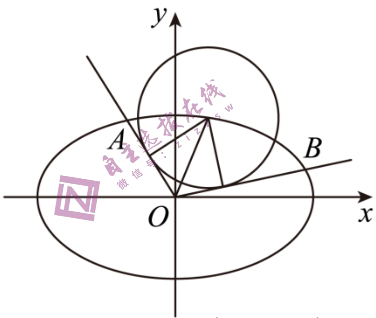
22（1）依题意得 $\begin{cases}2bc=4\sqrt{2}\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $a=\sqrt{6},b=\sqrt{2}$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$.（3 分）

（2）①直线 OA，OB 的方程分别为

$y=k_1x,y=k_2x$，设椭圆 C 的

“卫星圆”的圆心为 (x_0,y_0)，



因为直线 OA，OB 为“卫星圆”的两条切线，则 $\dfrac{|k_1x_0-y_0|}{\sqrt{1+k_1^2}}=\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

$\dfrac{|k_2x_0-y_0|}{\sqrt{1+k_2^2}}=\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$（4 分）

化简得 $(2x_0^2-3)k_1^2-4k_1x_0y_0+2y_0^2-3=0$，$(2x_0^2-3)k_2^2-4k_2x_0y_0+2y_0^2-3=0$，

所以 k_1，k_2 为方程 $(2x_0^2-3)k^2-4kx_0y_0+2y_0^2-3=0$ 的两根（7 分），故

$k_1k_2=\dfrac{2y_0^2-3}{2x_0^2-3}$，

又因为$\frac{x_0^2}{6}+\frac{y_0^2}{2}=1$，所以$k_1k_2=\frac{2y_0^2-3}{2x_0^2-3}=\frac{2y_0^2-3}{9-6y_0^2}=-\frac{1}{3}$，故$k_1k_2$为定值$-\frac{1}{3}$；（9分）

②设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}y_1=k_1x_1\\ \frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{2}=1\end{cases}$，$\begin{cases}y_2=k_2x_2\\ \frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{2}=1\end{cases}$，解得

$x_1^2=\frac{6}{3k_1^2+1},x_2^2=\frac{6}{3k_2^2+1}$，

$|OA|^2+|OB|^2=(1+k_1^2)\left(\frac{6}{3k_1^2+1}\right)+(1+k_2^2)\left(\frac{6}{3k_2^2+1}\right)$，由于$k_1k_2=-\frac{1}{3}$，所以

$k_2^2=\frac{1}{9k_1^2}$，

得$|OA|^2+|OB|^2=\frac{6(1+k_1^2)}{3k_1^2+1}+\frac{2(9k_1^2+1)}{3k_1^2+1}=\frac{8(1+3k_1^2)}{3k_1^2+1}=8$，

所以$|OA|^2+|OB|^2$为定值8．（12分）