2023年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

理科数学

本试卷总分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{-|x|+2}\}$，$B=\{y|y=x^2-2x+2\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-2,2]$　B. $[0,+\infty)$　C. $[1,2]$　D. $[0,2]$

2. 已知 $(1+2i)\bar{z}=9+3i$，则 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

3. 设 $p:a>1>b$，$q:ab+1<a+b$，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 $\tan(\alpha+15^\circ)=7\tan(\alpha-15^\circ)$，则 $\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)=$

A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{7}{12}$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{1}{12}$

5. 如图为国家统计局于2023年1月20日发布的2016—2022年全国R&D经费总量与R&D经费与GDP之比的数据图表，则

2016–2022年全国R&D经费及投入强度情况

A. R&D经费总量的平均数超过23 000亿元

B. R&D经费总量的中位数为19 678亿元

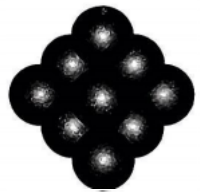
C. R&D经费与GDP之比的极差为0.45%

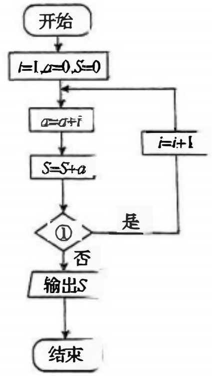
D. R&D经费与GDP之比增幅最大的是2021年到2022年

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-1$，$n(a_{n+1}-a_n)=\frac{2}{n+1}$，记 $\langle a_n\rangle$ 为不小于 a_n 的最小整数，$b_n=\langle a_n\rangle$，则数列 $\{b_n\}$ 的前2 023项和为

A. 2 020　B. 2 021　C. 2 022　D. 2 023

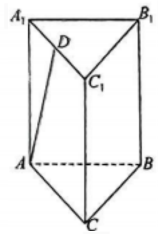
7. 南宋时期的数学家杨辉所著的《详解九章算法》中有一个如图所示的"三角垛"问题，在"三角垛"的最上层放有一个球，第二层放有3个球，第三层放有6个球，…… 依此规律，其相应的程序框图如图所示.若输出的 S 的值为56，则程序框图中①处可以填入





A. $i<4$　B. $i<5$　C. $i<6$　D. $i<7$

8. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2AB$，D 为棱 A_1C_1 的中点，则直线 AD 与平面 B_1BCC_1 所成角的正弦值为



A. $\frac{\sqrt{51}}{34}$

B. $\frac{\sqrt{51}}{17}$

C. $\frac{\sqrt{17}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{17}}{6}$

9. 已知 $a=\log_4 8$，$b=\frac{e^2}{4}$，$c=\frac{e^{2\,023}}{2\,023^2}$，则

A. $c<b<a$　B. $a<b<c$　C. $a<c<b$　D. $b<a<c$

10. 在数学中，欧拉-马歇罗尼常数 γ 是数学中的一个重要常用无理数，为了便于使用，我们认为 $\gamma\approx1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，且 $\gamma\approx0.577\,2$.研究 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 与 $g(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$ 的单调性，可得 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,600}$ 所在的区间为（参考数据：$\ln 2\approx0.693\,1$，$\ln 1\,600\approx7.377\,8$）

A. $(6.5,7)$　B. $(7,7.5)$　C. $(7.5,8)$　D. $(8,8.5)$

11. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$,以$F_1F_2$为直径的圆与双曲线在第二象限的部分交于点$P$,若双曲线上的点$Q$满足$\overrightarrow{F_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$,则双曲线的离心率为

A. $\frac{\sqrt{37}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{35}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{37}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

12. 已知函数$f(x)=x^3+(m-1)x^2+(n-m-1)x-n+1$在区间$(-1,1]$上有三个不同的零点,则$m^2-n^2$的取值范围是

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 已知单位向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})=-\frac{22}{3}$,则向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$夹角的余弦值为________.

14. 已知圆$O:x^2+y^2=4$与圆$C:(x-1)^2+(y-3)^2=4$,直线$l:2x-y+4=0$交圆O于A,B两点,交圆C于D,E两点,M,N分别为AB,DE的中点,则$|MN|=$________.

15. 在菱形$ABCD$中,$A=\frac{\pi}{3}$,$AB=2$,将$\triangle ABD$沿BD折起,使得点A到平面BCD的距离最大,此时四面体$ABCD$的所有顶点都在同一球面上,则该球的表面积为________.

16. 已知函数$f(x)=\frac{1}{2}(x+4)e^x$,$g(x)=x\ln(2x)+4x$.若实数x_1,x_2满足$f(x_1)=g(x_2)=a$$(a>2)$,则$x_1x_2+4x_2-4\ln a$的最小值为________.

三、解答题:共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共60分。

17. (12分)

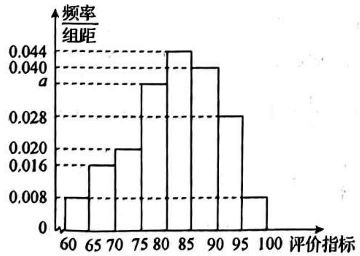
记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,已知$a_3=5$,$a_2>0$,且$S_6=(a_2+1)S_3$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\left\{\frac{n+S_n}{3^n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

18. (12分)

某乒乓球队训练教官为了检验学员某项技能的水平,随机抽取100名学员进行测试,并根据该项技能的评价指标,按$[60,65)$,$[65,70)$,$[70,75)$,$[75,80)$,$[80,85)$,$[85,90)$,$[90,95)$,$[95,100]$分成8组,得到如图所示的频率分布直方图.

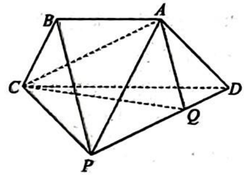


(1)求a的值,并估计该项技能的评价指标的中位数(精确到0.1);

(2)若采用分层抽样的方法从评价指标在$[70,75)$和$[85,90)$内的学员中随机抽取12名,再从这12名学员中随机抽取5名学员,记抽取到学员的该项技能的评价指标在$[70,75)$内的学员人数为X,求X的分布列与数学期望.

19. (12分)

如图,在四棱锥P-$ABCD$中,$AB\parallel CD$,$CP\perp CD$,$CD=2AB=2$,$AP=AC=AD$.



(1)证明:平面$PBC\perp$平面PCD;

(2)已知$CP=\sqrt{2}BC=2$,$\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DP}$,$\lambda\in[0,1]$.若平面$ABP$与平面$ACQ$夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$,求$\lambda$的值.

20. (12分)

已知椭圆$C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为$A$,$B$,长轴长为短轴长的2倍,点$P$在$C$上运动,且$\triangle ABP$面积的最大值为8.

(1)求C的方程;

(2)若直线l经过点$Q(1,0)$,交C于M,N两点,直线AM,BN分别交直线$x=4$于D,E两点,试问$\triangle ABD$与$\triangle AQE$的面积之比是否为定值?若是,求出该定值;若不是,说明理由.

21. (12分)

已知函数$f(x)=e^{-x}+a\cos x-2$.

(1)若$f(x)$在区间$[0,\pi]$上单调递减,求实数a的取值范围;

(2)当$x\in(-\infty,0]$时,$f(x)+(2-a)(x+1)\geqslant 1$恒成立,求实数$a$的取值范围.

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22. [选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系xOy中,直线l的参数方程为$\begin{cases}x=2-t,\\ y=3+t\end{cases}$($t$为参数).以坐标原点$O$为极点,$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2+4\rho\sin\theta+12-a=0(a>8)$.

(1)求l的普通方程和C的直角坐标方程;

(2)当l与C有公共点时,求实数a的取值范围.

23. [选修4—5:不等式选讲](10分)

已知函数$f(x)=2|x+2|-|x-5|$.

(1)求不等式$f(x)\geqslant 4$的解集;

(2)若$f(x)\geqslant a^2+2a-10$恒成立,求实数a的取值范围.