# 河北省“五个一”名校联盟

# 2023 届高三年级联考（2022.12）

# 数学试卷

## 命题单位：石家庄市第一中学

（满分：150 分，测试时间：120 分钟）

**一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知集合 $A=\left\{x\middle|-1<2^x<2,x\in R\right\}$，集合 $B=\left\{x\middle|-1<\log_2 x<2,x\in R\right\}$，则集合 $A\cap B=$（　　）

A. $\left\{x\middle|0<x<1\right\}$　B. $\left\{x\middle|x<1\right\}$　C. $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<1\right\}$　D. $\left\{x\middle|x<4\right\}$

答案：C.

2. 已知 $(3+i)z=4+i$，其中 $i$ 为虚数单位，则 $z$ 的虚部是（　　）

A. $\frac{13}{10}$　B. $-\frac{1}{10}$　C. $\frac{13}{10}i$　D. $-\frac{1}{10}i$

答案：B.

3. 已知 $p:x\neq 3$ 或 $y\neq 7$，$q:xy\neq 21$，则 $p$ 是 $q$ 的（　　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

答案：B.

4. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，左、右焦点分别为 $F_1$、$F_2$，$O$ 为坐标原点，$P$ 为右支上一点，且 $|OP|=\sqrt{a^2+b^2}$，$O$ 到直线 $PF_2$ 的距离为 $b$，则双曲线 $C$ 的离心率为（　　）

A. 2　B. $\sqrt{5}$　C. $\sqrt{6}$　D. $2\sqrt{2}$

答案：B.

5. 已知 $x>0,y>0$，且 $xy=1$，则 $\dfrac{x^3+2}{x}+\dfrac{4y^3+1}{y}$ 的最小值为（　　）

A. $2+2\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $4+\sqrt{2}$　　D. $4+2\sqrt{2}$

答案：D.

6.设异面直线 $a,b$ 所成的角为 $50^\circ$，经过空间一定点 $O$ 有且只有四条直线与直线 $a,b$ 所成的角均为 $\theta$，则 $\theta$ 可以是下列选项中的（　　）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{5\pi}{12}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

答案：C.

7. 设 $a=\dfrac{12}{13}$，$b=\ln\dfrac{7}{4}$，$c=\sin\dfrac{4}{3}$，那么以下正确的是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$　　C. $a>c>b$　　D. $c>b>a$

答案：B.

8. 已知点列 $P_n$ 在△ $ABC$ 内部，△ $ABP_n$ 的面积与△ $ACP_n$ 的面积比为 $\dfrac{1}{3}$，在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，若存在数列 $\{\lambda_n\}$ 使得对 $\forall n\in N^*$，$\overrightarrow{AP_n}=3\lambda_n a_n\overrightarrow{AB}+(4\lambda_n a_{n-1}+3\lambda_n)\overrightarrow{AC}$ 都成立，那么 $a_4=$（　　）

A. 15　　B. 31　　C. 63　　D. 127

答案：D.

**二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分.**

9.下列说法错误的是（　　）

A. 甲乙丙丁四个人排队，事件 $A$：甲不在排头，事件 $B$：乙不在排尾，那么 $P(B|A)=\dfrac{7}{9}$；

B. 若随机变量 $\xi$ 服从二项分布 $B(100,0.6)$，则 $P(\xi=0)=0.6^{100}$；

C. 若随机变量 $\xi$ 服从正态分布 $N(100,64)$，则 $E\xi=100,D\xi=8$；

D. $E(4X+1)=4E(X)+1$，$D(4X+1)=16D(X)+1$.

答案：BCD

10. 已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\theta)+1(0<\theta<\pi)$，其一个对称中心为点 $(\frac{\pi}{6},1)$，那么以下正确的是（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后，关于 $y$ 轴对称；

B. 函数 $\left|f(x)\right|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$；

C. 不等式 $f(x)\le 0$ 的解集是 $\left\{x\middle|k\pi+\frac{\pi}{4}\le x\le k\pi+\frac{7\pi}{12},k\in Z\right\}$；

D. 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},0\right]$ 时，$f(x)+\frac{36}{\pi}x\ge 0$ 恒成立.

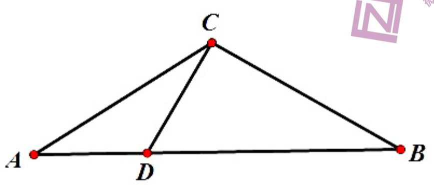
答案：ACD.

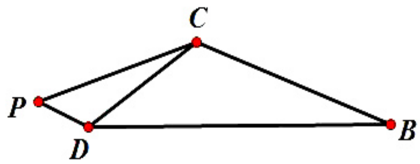
11.已知 $x,y,z$ 均为正数，$a=\sqrt{x^2+xy+y^2}$，$b=\sqrt{y^2+yz+z^2}$，$c=\sqrt{x^2+xz+z^2}$，则三元数组 $(a,b,c)$ 可以是以下（　　）

A. $(1,2,3)$　　B. $(3,4,9)$　　C. $(5,6,10)$　　D. $(7,8,13)$

答案：CD.

12. 已知等腰三角形 $ABC$，$AC=BC=3$，$AB=3\sqrt{3}$，$D$ 为边 $AB$ 上一点，且 $AD=\sqrt{3}$，沿 $CD$ 把△ $ADC$ 向上折起，$A$ 到达点 $P$ 位置，使得二面角 $P-CD-B$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$，在几何体 $PBCD$ 中，若其外接球半径为 $R$，其外接球表面积为 $S$，那么以下正确的是（　　）




A. $CD=\sqrt{3}$　　B. $PB=\frac{3\sqrt{10}}{2}$　　C. $R=3$　　D. $S=39\pi$

答案：ABD.

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，其中 16 题第一空 2 分，第二空 3 分，共 20 分.**

13.在 $(x-\frac{1}{x^2})^9$ 的展开式中，常数项是第_______项.

答案：4.

14. 已知函数 $f(x)=\lg(ax^2-6x+5)$ 的值域为 $R$，那么 $a$ 的取值范围是_______.

答案：$\left[0,\dfrac{9}{5}\right]$

15.已知椭圆 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 上有不同的三点 $A,B,C$，那么△ $ABC$ 面积最大值是_______.

答案：$\dfrac{15\sqrt{6}}{4}$.

16. 对 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)=x^3+(e-2m)x^2+x+e^x-e(\ln x+1)\geq 0$ 恒成立，那么 $m$ 的取值范围是________.

答案：$(-\infty,\dfrac{e}{2}+1]$

**四、解答题：本题共 6 小题，第 17 题 10 分，第 18～22 题每题 12 分，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17.已知数列 $\{a_n\}$，其前 $n$ 项和 $S_n=n^2-6n+1$，

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=2^n$，求数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

解析：（1）由题意可知，$S_n=n^2-6n+1$，

$S_{n-1}=(n-1)^2-6(n-1)+1(n\geq 2)$ ........................................................................2 分

两式作差，可得 $a_n=2n-7(n\geq 2)$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-4$，

所以 $a_n=\begin{cases}2n-7 & (n\geq 2)\\ -4 & (n=1)\end{cases}$ ..........................................................................................4 分

（2）由题意可知，$a_nb_n=(2n-7)\cdot 2^n\quad(n\geq 2)$，$a_1b_1=-8\quad(n=1)$

那么 $T_n=-8+a_2b_2+a_3b_3+......+a_nb_n$， ......................................................................6 分

可知：

$T_n-2=(-5)\cdot 2+(-3)\cdot 2^2+(-1)\cdot 2^3+......+(2n-7)\cdot 2^n$，两边乘以 2，可得：

$2(T_n-2)=(-5)\cdot 2^2+(-3)\cdot 2^3+(-1)\cdot 2^4+......+(2n-7)\cdot 2^{n+1}$， ......................8 分

两式作差可得：

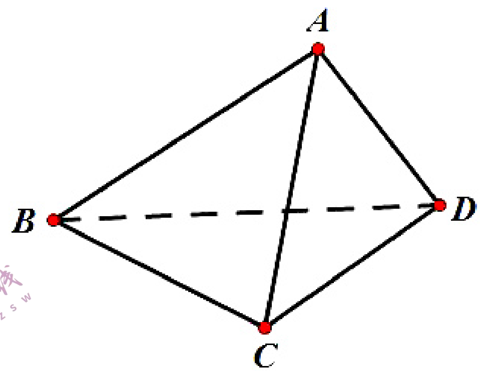
所以 $-(T_n-2)=-10+2^{n+2}-8-(2n-7)\cdot 2^{n+1}$，

即：$T_n=(2n-9)\cdot 2^{n+1}+20$ . ..............................................................................10 分

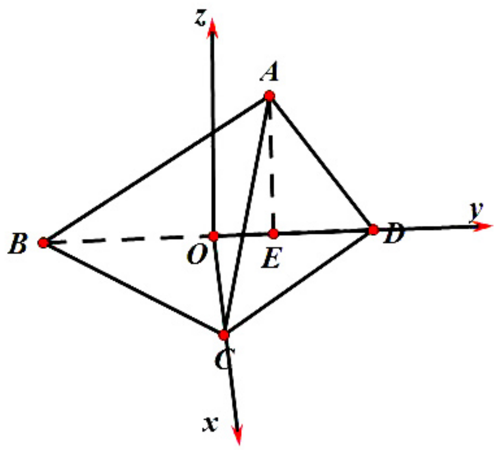
18. 已知在如图所示的三棱锥 $A-BCD$ 中，$BD=4, BA=2\sqrt{3}, BC=2\sqrt{2}$，$\angle BAD=\angle BCD=\dfrac{\pi}{2}$，面 $BAD\perp$ 面 $BCD$，

（1）求棱 $AC$ 的长度；

（2）求直线 $CD$ 与平面 $ABC$ 所成角的正弦值.




解析：由题意，取 $BD$ 中点设为 $O$，在面 $BAD$ 内做 $Oz\perp BD$，以 $O$ 为坐标原点，$OC,OD,Oz$ 分别为 $x,y,z$ 轴正方向，如图所示建立空间直角坐标系，..............................................1 分




（1）在直角三角形 $ABD$ 内，过 $A$ 做 $AE\perp BD$ 于 $E$，可求 $AD=2$，那么

$AE=\dfrac{AB\cdot AD}{BD}=\sqrt{3}$，$DE=\dfrac{AD^2}{BD}=1$，..................2 分

所以 $OE=1$，

那么 $A(0,1,\sqrt{3})$，$C(2,0,0)$，所以

$|AC|=2\sqrt{2}$ . ...............................................................4 分

（2）由题意，$B(0,-2,0)$，$D(0,2,0)$，

那么 $\overrightarrow{BA}=(0,3,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(2,2,0)$，……………………………………………………6 分

设平面 $ABC$ 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，那么：

$\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{m}=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{m}=0\end{cases}$，整理可得 $\begin{cases}3y+\sqrt{3}z=0\\ 2x+2y=0\end{cases}$，

令 y=1，那么 $\overrightarrow{m}=(-1,1,-\sqrt{3})$，……………………………………………………8 分

而 $\overrightarrow{CD}=(-2,2,0)$，……………………………………………………………………9 分

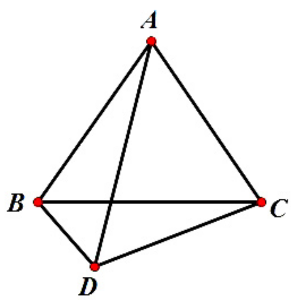
直线 $CD$ 与平面 $ABC$ 所成角的正弦即为 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{m}$ 所成角的余弦，

所以 $\cos<\overrightarrow{CD},\overrightarrow{m}>=\dfrac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{m}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{m}\right|}=\dfrac{(-2,2,0)\cdot(-1,1,-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

所以直线 $CD$ 与平面 $ABC$ 所成角的正弦为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$……………………………………………12 分

19.在三角形 $ABC$ 中，若 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$，

（1）求角 $A$ 的大小；
（2）如图所示，若 $DB=2$，$DC=4$，求 $DA$ 长度的最大值.




解析：由题意可知，由正弦定理可得：$a^2+b^2+c^2=2\sqrt{3}bc\sin A$，

再由余弦定理可得：$b^2+c^2-2bc\cos A+b^2+c^2=2\sqrt{3}bc\sin A$，

……………………………………………………………………………………2 分

即：$b^2+c^2=\sqrt{3}bc\sin A+bc\cos A$，整理可得：

$\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}=\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin(A+\dfrac{\pi}{6})$，…………………………………3 分

可知左边$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$，当且仅当$b=c$时，

右边$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin(A+\frac{\pi}{6})\le 2$，当且仅当$A=\frac{\pi}{3}$，

左右相等只有两边都等于 2 时，即同时取得等号，

所以，$A=\frac{\pi}{3}$. ........................................................................................................5 分

（2）由（1）可知：$b=c$，所以三角形$ABC$是正三角形.

设$\angle BDC=\theta$，$\angle BCD=\alpha$，那么由余弦定理可得：

$BC^2=4+16-2\cdot 2\cdot 4\cos\theta=20-16\cos\theta$，即：

$BC=\sqrt{20-16\cos\theta}$，同样$CA=\sqrt{20-16\cos\theta}$，..........................................7 分

在三角形$BDC$中，由正弦定理可得：

$\frac{\sqrt{20-16\cos\theta}}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\alpha}$，整理得：

$\sin\alpha=\frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$，..............................................................................9 分

因为$BD<CD$，所以$\alpha$为锐角，那么$\cos\alpha=\frac{2-\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$，........................10 分

那么$\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{5-4\cos\theta}}$，所以

$DA^2=16+20-16\cos\theta-8(2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)=20+16\sin(\theta-\frac{\pi}{6})\le 36$，

当且仅当$\theta=\frac{2\pi}{3}$时取得等号，所以$DA$最大值为 6..........................................12 分

20. 甲、乙两人进行一次乒乓球比赛，约定先胜 4 局者获得这次比赛的胜利，比赛结束，假设在一局比赛中，甲、乙获胜的概率均为 0.5，且各局比赛结果相互独立，已知前两局比赛均为甲获胜,全科免费下载公众号《高中僧课堂》

（1）求甲获得这次比赛胜利的概率；

（2）设$\xi$表示从第 3 局开始到比赛结束所进行的局数，求$\xi$的分布列及数学期望.

解析：用$A_i$表示事件：第$i$局甲获胜（$i=3,4,5,6,7$），用$B_i$表示事件：第$i$局乙获胜

（$i=3,4,5,6,7$），　　　　　　　　　　　　　　　　　.........................................................1 分

（1）记 A 表示事件：甲获得这次比赛的胜利，记 B 表示事件：乙获得这次比赛的胜利，

那么 $P(A)=1-P(B)=1-P(B_3B_4B_5B_6)-P(A_3B_4B_5B_6B_7)-P(B_3A_4B_5B_6B_7)$

$-P(B_3B_4A_5B_6B_7)-P(B_3B_4B_5A_6B_7)=1-(\frac{1}{2})^4-\frac{1}{2}C_4^1(\frac{1}{2})^4=\frac{13}{16}$. ......................4 分

（2）$\xi$ 表示从第 3 局开始到比赛结束所进行的局数，由题意 $\xi$ 可取 2，3，4，5，

那么 $P(\xi=2)=P(A_3A_4)=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$，

$P(\xi=3)=P(B_3A_4A_5)+P(A_3B_4A_5)=\frac{1}{2}C_2^1(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$，　. ......................7 分

$P(\xi=4)=P(B_3B_4B_5B_6)+P(A_3B_4B_5A_6)+P(B_3A_4B_5A_6)+P(B_3B_4A_5A_6)=\frac{1}{2}C_3^2(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{4}$

$P(\xi=5)=1-P(\xi=2)-P(\xi=3)-P(\xi=4)=\frac{1}{4}$ ......................................................10 分

所以 $E\xi=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}=\frac{7}{2}$.　　　　.................................................12 分

21.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$g(x)=-x^2$.

（1）若 $f(x)\ge ax+1$ 恒成立，求 $a$.

（2）若直线 $l$ 与函数 $f(x)$ 的图像切于 $A(x_1,y_1)$，与函数 $g(x)$ 的图像切于 $B(x_2,y_2)$，求证：$x_1+x_2<\frac{1}{4}$.

解：（1）设函数 $h(x)=e^x-ax-1\ge 0$，发现 $h(0)=0$，所以 $h(x)=e^x-ax-1\ge h(0)$ 恒成立，

那么 $x=0$ 是函数 $h(x)$ 的最小值点，也就是极小值点，所以 $h'(0)=0$，

求导：$h'(x)=e^x-a$，把 $x=0$ 代入得：$a=1$ ..................................................................2 分

证明：当 $a=1$ 时，$h(x)=e^x-x-1$，求导：$h'(x)=e^x-1$，

当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

所以 $h(x)\ge h(0)=0$.

所以 $a=1$ ........................................................................................................................4 分

（2）由题意可知：$f'(x)=\mathrm{e}^x$，$g'(x)=-2x$，

那么：$e^{x_1}=-2x_2=\dfrac{e^{x_1}-(-x_2^2)}{x_1-x_2}$ ........................................................................................6 分

解之可得：$-2x_2=\dfrac{-2x_2-(-x_2^2)}{x_1-x_2}$，即 $x_2=2x_1-2$，

所以 $x_1$ 满足 $e^{x_1}=-2(2x_1-2)$，即 $e^{x_1}+2(2x_1-2)=e^{x_1}+4x_1-4=0$ ..............................8 分

令 $m(x)=e^x+4x-4$，可知 $m(x)$ 单调递增，且 $m(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，$m(\frac{3}{4})=e^{\frac{3}{4}}-1>0$，

所以 $\dfrac{1}{2}<x_1<\dfrac{3}{4}$，........................................................................................10 分

而 $x_2=2x_1-2<-\dfrac{1}{2}$，

所以 $x_1+x_2<\dfrac{1}{4}$，命题得证........................................................................................12 分

22. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$，左、右顶点分别为 $A$、$B$，若 $T$ 为椭圆上一点，$\angle F_1TF_2$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{3}$，点 $P$ 在直线 $x=4$ 上，直线 $PA$ 与椭圆 $C$ 的另一个交点为 $M$，直线 $PB$ 与椭圆 $C$ 的另一个交点为 $N$，其中 $M$、$N$ 不与左右顶点重合.

（1）求椭圆 $C$ 的标准方程；

（2）从点 $A$ 向直线 $MN$ 做垂线，垂足为 $Q$，证明：存在点 $D$，使得 $|DQ|$ 为定值.

解：（1）由题意可得：$c=1$，设 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，那么

$$\cos\angle F_1TF_2=\frac{r_1^2+r_1^2-4c^2}{2r_1r_2}=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r-4c^2}{2r_1r_2}$$

$=\dfrac{4b^2-2r_1r}{2r_1r_2}=\dfrac{4b^2}{2r_1r_2}-1$，........................................................................................1 分

可知 $r_1r_2 \le \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2 = a^2$，当且仅当 $r_1 = r_2$ 取得等号，

所以上式 $\ge \frac{4b^2}{2a^2} - 1 = \frac{2b^2}{a^2} - 1$，即 $\cos\angle F_1TF_2$ 的最小值为 $\frac{2b^2}{a^2} - 1$，

又 $\angle F_1TF_2$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{2b^2}{a^2} - 1$，..........................................2 分

所以 $b^2 = \frac{3}{4}a^2$，又 $c = 1$，所以解得 $a = 2, b = \sqrt{3}$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

..............................................................................................................................4 分

（2）由题意可知，直线 $MN$ 斜率为 0 时，显然不成立；

设直线 $MN: x = my + t$，点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$，联立直线 $MN$ 与椭圆 $C$：

$\begin{cases} x = my + t \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$，整理可得：$(3m^2+4)y^2 + 6mty + 3t^2 - 12 = 0$，

$y_1 + y_2 = \frac{-6mt}{3m^2+4}, y_1y_2 = \frac{3t^2-12}{3m^2+4}$，..........................................5 分

由上，设直线 $MA: y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 $NB: y = \frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

两直线联立可知交点为 $P$，解之：$\frac{y_1}{x_1+2}(4+2) = \frac{y_2}{x_2-2}(4-2)$，

所以：$\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)} = \frac{1}{3}$，即：$\frac{y_1y_2(x_2-2)}{y_2^2(x_1+2)} = \frac{1}{3}$ ..........................................7 分

而 $y_2^2 = 3(1 - \frac{x_2^2}{4}) = -\frac{3}{4}(x_2-2)(x_2+2)$，代入上式，$-\frac{4}{3}\frac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)} = \frac{1}{3}$，

即：$-\frac{4}{3}\frac{y_1y_2}{(my_1+t+2)(my_2+t+2)}=\frac{1}{3}$，........................................................9 分

然后韦达定理代入可得:

$-\frac{4}{3}\frac{3t^2-12}{4(t+2)^2}=\frac{1}{3}$，解之可得：$t=1$或$-2$（舍）.........................................11 分

可知直线$MN$过定点$E(1,0)$，又由条件：$AQ\perp EQ$，所以$Q$在以$AE$为直径的圆上，圆心即为$D(-\frac{1}{2},0)$，$|DQ|$为定值$\frac{3}{2}$ ..........................................................12 分