海淀区高三年级第一学期期中练习参考答案

数 学　　2019.11

阅卷须知:

1.评分参考中所注分数，表示考生正确做到此步应得的累加分数。

2.其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	C	A	B	B	A	A

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

题号	9	10	11	12	13	14
答案	6	1	0；1	3	$\left[\frac{\ln 3}{3},-\infty\right)$	2π；$\frac{\pi}{2}$

说明:第 11，14 题第一空 3 分，第二空 2 分

三、解答题: 本大题共 6 小题，共 80 分.

15．解：（Ⅰ）在等比数列$\{a_n\}$中，设$\{a_n\}$公比为q.

因为$a_2=3$，$a_3-a_4=36$，

所以$\begin{cases} a_1q=3, \\ a_1q^2+a_1q^3=36. \end{cases}$

所以$3q-3q^2=36$．即$q^2-q-12=0$.

则$q=3$或$q=-4$.

因为$a_n>0$,

所以$q>0$,

所以$q=3$.

因为$a_2=a_1q=3$,

所以$a_1=1$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=a_1q^{n-1}=3^{n-1}$．

（Ⅱ）在等比数列$\{a_n\}$中，

因为$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1)$，

所以$S_n=\dfrac{1-3^n}{1-3}=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$.

因为$S_n<121$，

所以$S_n=\dfrac{1}{2}(3^n-1)<121$.

所以$3^n<243$.

所以$n<5$.

因为$n\in\mathbf{N}^*$，

所以$n\leq 4$. 即n的最大值为4.

16.解：（Ⅰ）因为$f(x)=2\sin x\cos(x+\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sin x(\cos x\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sin x(\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$.

所以$f(x)$的最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

（Ⅱ）“$f(x)+m\leq 0$对$x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$恒成立”等价于“$f(x)_{\max}-m\leq 0$”.

因为$x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，

所以$2x+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}]$.

当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，

$f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{\pi}{12})=1$.

所以 $1+m\le 0$，

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

17．解：（Ⅰ）$f'(x)=ax^2+2x+b$，

因为 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x+1$，

所以 $\begin{cases} f'(0)=1, \\ f(0)=1. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b=1, \\ c=1. \end{cases}$

（Ⅱ）$f(x)=\frac{1}{3}ax^3+x^2+x+1$，

① 当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2+x+1$ 不存在极大值，不符合题意.

②当 $a>0$ 时，$f'(x)=ax^2-2x+1$.

令 $ax^2+2x+1=0$.

（i）当 $\Delta=4-4a\le 0$，即 $a\ge 1$ 时，不符合题意.

（ii）当 $\Delta=4-4a>0$，即 $0<a<1$ 时，方程 $ax^2+2x+1=0$ 有两个不相等的实数根.

设方程两个根为 x，x_2，且 $x_1<x_2$.

x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如表所示：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	-	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x_1)$ 为极大值.

③当 $a<0$ 时，$\Delta=4-4a>0$ 恒成立. 设方程两个根为 x，x_2，且 $x_1<x_2$.

x，$f'(x)$，$f(x)$的变化如表所示：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以$f(x_2)$为极大值.

综上，若函数$f(x)$存在极大值，a的取值范围为$(-\infty,0)\cup(0,1)$.

18．解：（Ⅰ）在$\triangle ABC$中，$a=7$，$b=5$，$c=8$，

根据余弦定理$\cos A=\dfrac{b^2-c^2-a^2}{2bc}$

所以$\cos A=\dfrac{5^2-8^2-7^2}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}$.

因为$A\in(0,\pi)$，

所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅱ）①在$\triangle ABC$中，

根据正弦定理，得$\dfrac{CP}{\sin A}=\dfrac{AP}{\sin\angle ACP}$.

$k=\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{\sin\angle ACP}{\sin A}=\dfrac{\sin\angle ACP}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\angle ACP$.

因为点P为射线AB上一动点，

所以$\angle ACP\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$.

所以k的取值范围为$(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}]$.

②答案不唯一．取值在区间$(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$上均正确.

19．（Ⅰ）函数$f(x)$在区间$(0,1)$上是单调递增函数.

理由如下：

由 $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$，得 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}$.

因为 $x\in(0,1)$,

所以 $\dfrac{1}{x}>1$, $\ln x<0$.

因此 $\dfrac{1}{x}-\ln x>0$.

又因为 $e^x>0$，

所以 $f'(x)>0$ 恒成立.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是单调递增函数.

（Ⅱ）证明“$f(x)<\dfrac{1}{2}$”等价于证明“$f(x)_{max}<\dfrac{1}{2}$”

由题意可得，$x\in(0,+\infty)$.

因为 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}$,

令 $g(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$, 则 $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $g(1)=1>0$, $g(e)=\dfrac{1}{e}-1<0$，

所以存在唯一实数 x_0，使得 $g(x_0)=0$，其中 $x_0\in(1,e)$.

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如表所示：

所以 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值.

因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一的极大值.

所以 $f(x)_{\max}=f(x_0)=\dfrac{\ln x_0}{\mathrm{e}^{x_0}}$.

因为 $\dfrac{1}{x_0}=\ln x_0$，

所以 $f(x)_{\max}=f(x_0)=\dfrac{\ln x_0}{\mathrm{e}^{x_0}}=\dfrac{1}{x_0\mathrm{e}^{x_0}}$.

因为 $x_0\in(1,\mathrm{e})$，

所以 $f(x)_{\max}=\dfrac{1}{x_0\mathrm{e}^{x_0}}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}<\dfrac{1}{2}$.

所以 $f(x)<\dfrac{1}{2}$.

20.**解:**（Ⅰ）$\{2,4,6,8,10\}$ 是“关联的”，关联子集有 $\{2,4,6,8\}$，$\{4,6,8,10\}$，$\{2,4,8,10\}$，

$\{1,2,3,5,8\}$ 是“独立的”

（Ⅱ）记集合 M 的含有四个元素的集合分别为：

$A_1=\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$，$A_2=\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$，$A_3=\{a_1,a_2,a_4,a_5\}$，$A_4=\{a_1,a_2,a_3,a_5\}$，

$A_5=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

所以，M 至多有 5 个“关联子集”.

若 $A_2=\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$ 为“关联子集”，则 $A_1=\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 不是“关联子集”，否则

$a_1=a_2$；

同理可得若 $A_2=\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$ 为“关联子集”，则 A_3，A_4 不是“关联子集”.

所以集合 M 没有同时含有元素 a_2,a_5 的“关联子集”，与已知矛盾.

所以 $A_2=\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$ 一定不是“关联子集”.

同理 $A_4=\{a_1,a_2,a_3,a_5\}$ 一定不是“关联子集”.

所以集合 M 的“关联子集”至多为 A_1，A_3，A_5.

若 A_1 不是“关联子集”，则此时集合 M 一定不含有元素 a_1,a_5 的“关联子集”，与已知矛盾；

若 A_3 不是“关联子集”，则此时集合 M 一定不含有元素 a_1,a_3 的“关联子集”，与已知矛盾；

若 A_5 不是“关联子集”，则此时集合 M 一定不含有元素 a_3,a_5 的“关联子集”，与已知矛盾.

所以 A_1，A_3，A_5 都是“关联子集”.

所以有 $a_2+a_5=a_3+a_4$，即 $a_5-a_4=a_3-a_2$；

$a_1+a_5=a_2+a_4$，即 $a_5-a_4=a_2-a_1$

$a_1+a_4=a_2+a_3$，即 $a_4-a_3=a_2-a_1$，

所以 $a_5-a_4=a_4-a_3=a_3-a_2=a_2-a_1$.

所以 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 是等差数列.

（III）不妨设集合 $M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\ge 5)$，$a_i\in\mathbf{N}^*$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$.

记 $T=\{t\mid t=a_i+a_j,1\le i<j\le n,i,j\in\mathbf{N}^*\}$.

因为集合 M 是“独立的”的，所以容易知道 T 中恰好有 $\mathrm{C}_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个元素.

假设结论错误，即不存在 $x\in M$，使得 $x>\dfrac{n^2-n+9}{4}$.

所以任取 $x\in M$，$x\le\dfrac{n^2-n+9}{4}$. 因为 $x\in\mathbf{N}^*$，所以 $x\le\dfrac{n^2-n+8}{4}$.

所以 $a_i+a_j\le\dfrac{n^2-n+8}{4}+\dfrac{n^2-n-8}{4}-1=\dfrac{n^2-n+8}{2}-1=\dfrac{n^2-n}{2}+3$.

所以任取 $t\in T$，$t\le\dfrac{n^2-n}{2}+3$.

任取 $t\in T$，$t\ge 1+2=3$，

所以$T\subseteq\{3,4,\cdots,\frac{n^2-n}{2}-3\}$，且$T$中含有$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$个元素.

（i）若$3\in T$，则必有$a_1=1,a_2=2$成立.

因为$n\geq5$，所以一定有$a_n-a_{n-1}>a_2-a_1$成立.所以$a_n-a_{n-1}\geq2$.

所以$a_n+a_{n-1}\leq\frac{n^2-n-8}{4}+\frac{n^2-n-8}{4}-2=\frac{n^2-n}{2}+2$.

所以$T=\{t\mid3\leq t\leq\frac{n^2-n}{2}+2,t\in\mathbf{N}^*\}$.所以$a_n=\frac{n^2-n+8}{4}$，$a_{n-1}=\frac{n^2-n+8}{4}-2$.

因为$4\in T$，所以$a_3=3$，所以有$a_n-a_1=a_{n-1}-a_3$，矛盾.

（ii）若$3\notin T$，则$T\subseteq\{4,5,\cdots,\frac{n^2-n}{2}+3\}$.

而T中含有$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$个元素，所以$T=\{t\mid4\leq t\leq\frac{n^2-n}{2}+3,t\in\mathbf{N}^*\}$.

所以$a_n=\frac{n^2-n-8}{4}$，$a_{n-1}=\frac{n^2-n+8}{4}-1$.

因为$4\in T$，所以$a_1=1,a_2=3$.

因为$\frac{n^2-n}{2}+2\in T$，所以$\frac{n^2-n}{2}+2=a_{n-2}+a_n$.

所以$a_{n-2}=\frac{n^2-n+8}{4}-2$.

所以$a_n-a_1=a_{n-2}+a_2$，矛盾.

所以命题成立.

和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2019-2020 学年高三上学期期中试题及参考答案（更新下载中），点击链接获得 http://www.zizzs.com/c/201911/40242.html