

2021 届高三限时练习

2021 届高三第二学期限时练习  
数学参考答案与评分标准

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

1-5. DCADB

6-10. ACCDD

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. -6; -1

12. B; A

13.  $\frac{\pi}{12}$

14. (-1, 2), (1, 4)

15. ①②④

注：第 11、12 题第一空 3 分，第二空 2 分；第 14、15 题不全对得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (本小题 13 分)

选①：因为  $B = \frac{\pi}{4}$ ，所以  $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . ..... 1 分

因为  $\cos A = \frac{3}{5}$ ， $A \in (0, \pi)$ ，所以  $\sin A = \frac{4}{5}$ . ..... 3 分

在  $\triangle ABC$  中， $\sin C = \sin(\pi - A - B) = \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ .  
..... 7 分

又因为  $a = 4\sqrt{2}$ ，

由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ，即  $\frac{4\sqrt{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{c}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}$ ，解得  $c = 7$ . ..... 10 分

所以  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 7 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 14$ . ..... 13 分

选②：因为  $a = 4\sqrt{2}$ ， $b = 5$ ， $\cos A = \frac{3}{5}$ ，

由余弦定理  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，即  $32 = 25 + c^2 - 2 \times 5c \times \frac{3}{5}$ ，  
解得  $c = 7$  或  $c = -1$  (舍去). ..... 5 分

因为  $\cos A = \frac{3}{5}$ ， $A \in (0, \pi)$ ，所以  $\sin A = \frac{4}{5}$ . ..... 7 分

由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ，即  $\frac{4\sqrt{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{7}{\sin C}$ ，解得  $\sin C = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ . ..... 10 分

所以  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 5 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = 14$ . ..... 13 分



2021 届高三限时练习

17. (本小题 14 分)

(I) 连接  $AC$  交  $BD$  于  $N$ , 连接  $MN$ .

因为底面  $ABCD$  是矩形, 所以  $N$  是线段  $AC$  的中点.

又因为  $M$  是线段  $PC$  的中点, 所以  $PA \parallel MN$ .

..... 1 分

又因为  $PA \not\subset$  平面  $BDM$ ,  $MN \subset$  平面  $BDM$ ,

所以  $PA \parallel$  平面  $BDM$ .

..... 3 分

(II) 因为  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD \subset$  底面  $ABCD$ ,  $CD \subset$  底面  $ABCD$ ,

所以  $PD \perp AD$ ,  $PD \perp CD$ .

因为底面  $ABCD$  是矩形, 所以  $AD \perp CD$ .

..... 4 分

如图建立空间直角坐标系  $D-xyz$ ,

则  $D(0,0,0)$ ,  $A(1,0,0)$ ,  $C(0,2,0)$ ,  $P(0,0,2)$ ,  $B(1,2,0)$ .

因为  $M$  是线段  $PC$  的中点, 故  $M(0,1,1)$ .

..... 5 分

所以  $\overrightarrow{DB} = (1,2,0)$ ,  $\overrightarrow{DM} = (0,1,1)$ .

设平面  $BDM$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DM} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x - 2y = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

令  $y = 1$ , 则  $x = 2$ ,  $z = 1$ .

于是  $\vec{n} = (2, 1, 1)$ .

..... 7 分

因为  $PD \perp$  底面  $ABCD$ , 所以  $\overrightarrow{DP}$  为平面  $BDM$  的法向量.

$$\text{因为 } \overrightarrow{DP} = (0,0,2), \text{ 所以 } \cos \langle \overrightarrow{DP}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{DP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{DP}| |\vec{n}|} = \frac{-2}{2 \times \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

由题知二面角  $M-BD-C$  是锐角, 所以其余弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ .

..... 10 分

(III) 因为  $N$  为直线  $BD$  上一点, 所以  $N(\lambda, 2\lambda, 0)$ , 其中  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

所以  $\overrightarrow{MN} = (\lambda, 2\lambda - 1, -1)$ .

又因为  $\overrightarrow{AP} = (-1, 0, 2)$ ,  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AP} = -\lambda - 2$ .

所以  $\overrightarrow{MN}$  与  $\overrightarrow{AP}$  垂直等价于  $\lambda = -2$ .

所以存在点  $N(-2, -4, 0)$ , 使得  $MN$  与  $PA$  垂直,

..... 13 分

此时  $\lambda = -2$ ,  $\overrightarrow{MN} = (-2, -5, -1)$ ,  $MN$  的长为  $\sqrt{30}$ .

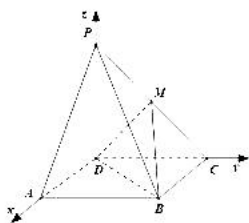
..... 14 分

(I) 另解:

因为  $\overrightarrow{AP} = (-1, 0, 2)$ ,  $\vec{n} = (2, 1, 1)$ ,

所以  $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = -1 \times 2 - 0 \times 1 - 2 \times 1 = -4 \neq 0$ ,  $\overrightarrow{AP} \not\perp \vec{n}$ .

又因为  $AP \subset$  平面  $BDM$ , 所以  $PA \parallel$  平面  $BDM$ .



2021 届高三限时练习

18. (本小题 14 分)

(I) 设“从所有的回访客户中随机抽取 1 人, 这个客户满意”为事件  $M$ .

由题意知, 样本中的回访客户的总数是  $250+100+200+700+350=1600$ ,

满意的客户人数是  $250 \times 0.5 + 100 \times 0.5 + 200 \times 0.6 + 700 \times 0.3 + 350 \times 0.2 = 575$ ,

故所求概率为  $P(M) = \frac{575}{1600} = \frac{23}{64}$ . ..... 5 分

(II)  $\xi = 0, 1, 2$ . ..... 6 分

设“从 I 型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”为事件  $A$ ,

“从 V 型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”为事件  $B$ .

根据题意,  $P(A)$  估计为 0.5,  $P(B)$  估计为 0.2,  $A$  与  $B$  相互独立.

所以  $P(\xi=0) = P(\bar{A}\bar{B}) = (1-P(A))(1-P(B)) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$ ;

$P(\xi=1) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A)(1-P(B)) + (1-P(A))P(B)$

$= 0.5 \times 0.8 + 0.5 \times 0.2 = 0.5$ ;

$P(\xi=2) = P(AB) = P(A)P(B) = 0.5 \times 0.2 = 0.1$ . ..... 9 分

所以  $\xi$  的分布列为

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $\xi$ | 0   | 1   | 2   |
| $P$   | 0.4 | 0.5 | 0.1 |

所以  $\xi$  的期望  $E(\xi) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.1 = 0.7$ . ..... 12 分

(III)  $D\eta_1 = D\eta_2 > D\eta_3 > D\eta_4 > D\eta_5$ . ..... 14 分

19. (本小题 14 分)

(I) 因为椭圆  $C$  的焦距  $2\sqrt{3}$ , 所以  $c = \sqrt{3}$ .

又因为椭圆  $C$  过点  $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , 所以  $\frac{1}{a^2} - \frac{3}{4b^2} = 1$ .

又因为  $a^2 = b^2 - c^2$ , 所以  $a^2 = 4$ ,  $b^2 = 1$ .

所以椭圆  $C$  的标准方程为:  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . ..... 5 分

(II) 设点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $F(\sqrt{3}, 0)$ ,  $M(0, y_0)$ .

由题意可知, 直线  $l$  的斜率存在, 可设直线  $l$  的方程为  $y = k(x - \sqrt{3})$ .

联立  $\begin{cases} y = k(x - \sqrt{3}) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$ , 得  $(4k^2 - 1)x^2 - 8\sqrt{3}k^2x - 12k^2 - 4 = 0$ .

由于点  $F$  在椭圆  $C$  的内部, 直线  $l$  与椭圆  $C$  必有两个交点, 必有  $\Delta > 0$ .

由韦达定理可得  $x_1 - x_2 = \frac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2 - 1}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{12k^2 - 4}{4k^2 - 1}$ . ..... 9 分

2021 届高三限时练习

因为  $\overline{MA} = \lambda_1 \overline{AF}$ ,  $\overline{MB} = \lambda_2 \overline{BF}$ ,

得  $(x_1, y_1 - y_0) = \lambda_1 (\sqrt{3} - x_1, -y_1)$ ,  $(x_2, y_2 - y_0) = \lambda_2 (\sqrt{3} - x_2, -y_2)$ .

依题意,  $x_1 \neq \sqrt{3}$ ,  $x_2 \neq \sqrt{3}$ ,

所以  $\lambda_1 = \frac{x_1}{\sqrt{3} - x_1}$ ,  $\lambda_2 = \frac{x_2}{\sqrt{3} - x_2}$ . ..... 11 分

所以  $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{x_1}{\sqrt{3} - x_1} - \frac{x_2}{\sqrt{3} - x_2} = \frac{\sqrt{3}(x_1 + x_2) - 2x_1x_2}{3 - \sqrt{3}(x_1 + x_2) + x_1x_2} = \frac{24k^2 - 2(12k^2 - 4)}{3 - \frac{4k^2 - 1}{4k^2 - 1}} = -8$ .

所以  $\lambda_1 - \lambda_2$  为定值. .... 14 分

20. (本小题 15 分)

(I) 可求得  $f'(x) = \frac{-x^2 - (2-a)x - a - b}{e^x}$ .

因为  $f(x)$  的一个极值点是  $x=2$ ,

所以  $f'(2) = \frac{-4 - 2(2-a) - a - b}{e^2} = 0$ .

所以  $b = a$ . ..... 2 分

所以  $f'(x) = \frac{-x^2 - (2-a)x - 2a}{e^x} = \frac{-(x-a)(x-2)}{e^x}$ . ..... 3 分

① 当  $a = -2$  时,

$f'(x) \leq 0$ ,  $f(x)$  单调递减, 此时函数没有极值点, 不符合题意;

② 当  $a < -2$  时,

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = 2$  或  $x = -a$ , 其中  $2 < -a$ .

| $x$     | $(-\infty, 2)$ | 2 | $(2, -a)$ | $-a$ | $(-a, +\infty)$ |
|---------|----------------|---|-----------|------|-----------------|
| $f'(x)$ | -              | 0 | -         | 0    | -               |
| $f(x)$  | ↘              |   | ↗         |      | ↘               |

③ 当  $a > -2$  时,

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = 2$  或  $x = -a$ , 其中  $-a < 2$ .

| $x$     | $(-\infty, -a)$ | $-a$ | $(-a, 2)$ | 2 | $(2, +\infty)$ |
|---------|-----------------|------|-----------|---|----------------|
| $f'(x)$ | -               | 0    | -         | 0 | -              |
| $f(x)$  | ↘               |      | ↗         |   | ↘              |

综上所述,  $b = a = -2$ . .... 6 分

当  $a < -2$  时,  $f(x)$  的单调递增区间为  $(2, -a)$ , 单调递减区间为  $(-\infty, 2)$  和  $(-a, +\infty)$ ;

当  $a > -2$  时,  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-a, 2)$ , 单调递减区间为  $(-\infty, -a)$  和  $(2, +\infty)$ . .... 7 分

..... 9 分

(II) 考虑  $f(x) = \frac{x^2 - ax - a}{e^x} (a > 0)$  在  $[0, 3]$  的最值.

由 (I) 可知,  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, 2)$  单调递增, 在  $(2, 3)$  单调递减,

又因为  $f(0) = -a < 0$ ,  $f(3) = \frac{9-2a}{e^3} > 0$ ,  $f(0) < f(3)$ ,

所以  $f(x)$  在  $[0, 3]$  的最大值为  $f(2) = \frac{4-a}{e^2}$ , 最小值为  $f(0) = -a$ .

..... 11 分

因为  $g(x) = a^2 e^{x-2}$  在  $[0, 3]$  单调递增,

所以  $g(x)$  在  $[0, 3]$  的最大值为  $g(3) = a^2 e$ , 最小值为  $g(0) = \frac{a^2}{e^2}$ .

..... 12 分

因为存在  $x_1, x_2 \in [0, 3]$ , 使得  $|f(x_1) - g(x_2)| < \frac{2}{e^2}$  成立.

即存在  $x_1, x_2 \in [0, 3]$ , 使得  $-\frac{2}{e^2} < f(x_1) - g(x_2) < \frac{2}{e^2}$  成立.

$$\text{即} \begin{cases} -a - a^2 e < \frac{2}{e^2}, \\ \frac{4-a}{e^2} - \frac{a^2}{e^2} > -\frac{2}{e^2}. \end{cases}$$

又因为  $a > 0$ ,

所以  $a$  的取值范围是  $(0, 3)$ .

..... 15 分

21. (本小题 15 分)

(I) 因为  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 3$ ,  $z_1 = 4$ ,

依题意,  $x_2 = -1$ ,  $y_2 = 2$ ,  $z_2 = -1$ ,  $x_3 = 1$ ,  $y_3 = 0$ ,  $z_3 = -1$ .

所以  $u_1 = 4$ ,  $u_2 = 2$ ,  $u_3 = 1$ .

..... 5 分

(II) 设  $a_n = |x_n|$ ,  $b_n = |y_n|$ ,  $c_n = |z_n|$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$ ,  $c_n \geq 0$ .

依题意,  $u_n = \max\{a_n, b_n, c_n\}$ ,  $a_{n+1} = |b_n - c_n|$ ,  $b_{n+1} = |c_n - a_n|$ ,  $c_{n+1} = |a_n - b_n|$ .

所以  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} \leq \max\{a_n, b_n, c_n\}$ .

所以  $\max\{a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}\} \leq \max\{a_n, b_n, c_n\}$ .

即  $u_{n+1} \leq u_n$  (当且仅当  $a_n, b_n, c_n$  中至少有一项为 0 时等号成立).

因为  $u_2 = u_3$ , 所以  $a_2, b_2, c_2$  中至少有一项为 0.

因为  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 3$ , 所以  $a_1 = 2$ ,  $b_1 = 3$ .

所以  $a_2 = |3 - c_1|$ ,  $b_2 = |c_1 - 2|$ ,  $c_2 = |2 - 3| = 1$ .

所以  $c_1 = 2$  或  $3$ .

所以  $z_1 = -3, -2, 2$  或  $3$ .

..... 10 分

2021 届高三限时练习

(III) 数列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$  中一定存在无穷个 0. ....11 分

设  $x_1, y_1, z_1$  的最小公分母为  $p$ , 将  $x_n, y_n, z_n$  均改为原来的  $p$  倍.

则  $x_1, y_1, z_1$  均为整数, 题目的其它条件仍然成立, 且问题不变.

于是对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n, y_n, z_n$  均为整数,  $a_n, b_n, c_n, u_n$  均为自然数.

.....12 分

反证法, 假设数列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$  中没有 0, 或者有有限个 0.

则存在  $m \in \mathbb{N}$ , 对任意  $k > m$ , 均有  $a_k, b_k, c_k, u_k \geq 1$ .

设  $d_n = u_{n-1} - u_n (n \in \mathbb{N}^*)$ , 则  $u_{n-1} = u_{n-1} + d_{n-1} + d_{n-2} + \cdots + d_{n-n}$ .

由 (II),  $u_{n+1} \leq u_n$ , 故  $d_n = u_{n-1} - u_n \leq 0$ .

假若对任意  $k > m$ ,  $d_k$  均不为 0, 则  $d_k \leq -1$ ,  $u_{n-1} \leq u_{n-1} - n$ .

令  $n = u_{m+1}$ , 则  $u_{u_{m+1}-1} \leq 0$ , 与  $u_{u_{m+1}-1} \geq 1$  矛盾.

所以存在  $n_0 > m$ , 使得  $d_{n_0} = 0$ , 即  $u_{n_0-1} = u_{n_0}$ .

由 (II),  $a_{n_0}, b_{n_0}, c_{n_0}$  中至少有一项为 0, 与  $a_{n_0}, b_{n_0}, c_{n_0} \geq 1$  矛盾.

所以假设不成立, 数列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$  中一定存在无穷个 0.

.....15 分



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》