学校________ 班级________ 姓名________ 学号________

密 封 线 内 不 要 答 题

高二期末联考
数学试题

本试卷共 8 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0, x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\left\{x\left|\, y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right.\right\}$，则 $A\cap B$ 真子集的个数为

A. 7　　B. 8　　C. 15　　D. 16

2. 1748 年，瑞士数学家欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系，并写出以下公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$（$x\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位），这个公式在复变论中占有非常重要的地位，被誉为"数学中的天桥"．根据此公式，化简 $(e^{\frac{\pi}{4}i})^{2024}+e^{\frac{\pi}{2}i}$ 的结果为

A. 2　　B. 2i

C. 1+i　　D. 1−i

3. 已知 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，且 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=m(m>0)$，则 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$

A. $\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$　　B. $-\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$　　C. $\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. −2　　B. 2　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

5. "五一"假期期间，某旅游景区为加强游客的安全工作，决定增派甲、乙、丙、丁四位工作人员到 A、B、C 三个景点进行安全防护宣传，增派的每位工作人员必须到一个景点，且只能到一个景点做安全防护宣传，每个景点至少增派一位工作人员．因工作需要，乙不能去 A 景点，甲和乙不能同去一个景点，则不同的安排方法数为

A. 20　　B. 30　　C. 42　　D. 60

6. 已知圆 $O:x^2+y^2=1$，点 P 在直线 $l:x-y-2\sqrt{2}=0$ 上运动，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点分别为 A,B，当 $\angle APB$ 最大时，记劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 及 PA,PB 所围成的平面图形的面积为 S，则

A. $2<S<3$　　B. $1<S\leqslant 2$

C. $1<S\leqslant 3$　　D. $0<S<1$

7. 南宋数学家杨辉在《详解九章算术》中提出了高阶等差数列的问题，即一个数列 $\{a_n\}$ 本身不是等差数列，但从 $\{a_n\}$ 数列中的第二项开始，每一项与前一项的差构成等差数列 $\{b_n\}$（则称数列 $\{a_n\}$ 为一阶等差数列），或者 $\{b_n\}$ 仍旧不是等差数列，但从 $\{b_n\}$ 数列中的第二项开始，每一项与前一项的差构成等差数列 $\{c_n\}$（则称数列 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列），依次类推，可以得到高阶等差数列. 类比高阶等差数列的定义，我们亦可定义高阶等比数列，设数列 $\{a_n\}$：1，1，3，27，729…是一阶等比数列，则 $\sum\limits_{n=1}^{10}\log_3 a_n$ 的值为 $\left(\text{参考公式}:1^2+2^2+\cdots n^2=\dfrac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right)$

A. 60　　B. 120　　C. 240　　D. 480

8. 若 $a=\sqrt{1.4}-1$，$b=\sin 0.2$，$c=\ln 1.44$，则

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$

C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=-2$，$a_{n+1}=a_n+1$，则

A. $a_{2\,023}=2\,020$

B. 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列

C. 数列 $\{S_n\}$ 中的最小项为 S_2

D. S_m、S_{2m}、S_{3m} $(m\in\mathbf{N}^*)$ 成等差数列

10. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(1<\omega<3)$，满足 $f\left(-\dfrac{5\pi}{12}-x\right)=f\left(-\dfrac{5\pi}{12}+x\right)$，则

A. $\omega=2$

B. $f(x)$ 的最小正周期为 π

C. $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 单调递增

D. $f(2\,023\pi)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点分别是 F_1,F_2，渐近线方程为 $3x\pm y=0$，点 $R(4,6\sqrt{3})$在双曲线 E 上，点 M 为双曲线右支上任一点，则

A. 双曲线的离心率为$\sqrt{5}$

B. 右焦点 F_2 到渐近线的距离为 6

C. 过双曲线右焦点 F_2 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，当$|AB|=30$ 时，直线 l 有 3 条

D. 若直线 MF_1 与双曲线 E 的另一个交点为 P，Q 为 MP 的中点，O 为原点，则直线 OQ 与直线 PM 的斜率之积为 9

12. 乒乓球，被称为中国的“国球”，是一种世界流行的球类体育项目，包括进攻、对抗和防守. 某乒乓球协会组织职工比赛，比赛规则采用五局三胜制，当参赛选手甲和乙两位中有一位赢得三局比赛时，就由该选手晋级且比赛结束. 每局比赛皆须分出胜负，且每局比赛的胜负相互独立. 假设甲在任一局赢球的概率为 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$，有选手晋级所需要比赛局数的期望值记为 $f(p)$，则

A. 打满五局的概率为 $C_4^2p^2(1-p)^2$

B. $f(p)$的常数项为 3

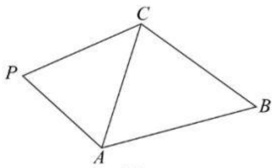
C. 函数 $f(p)$在$\left(\frac{1}{2},1\right]$上单调递增

D. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{33}{8}$

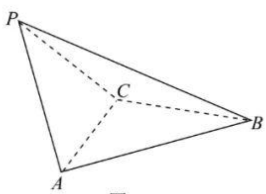
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 2023 年 3 月，某市为创建文明城市，随机从某小区抽取 10 位居民调查他们对自己目前生活状态的满意程度，该指标数越接近 10 表示满意程度越高. 他们的满意度指标数分别是 8，5，6，6，9，8，9，7，10，10，则这组数据的 30%分位数是________.

14. 为加强学生对平面图形翻折到空间图形的认识，某数学老师充分利用习题素材开展活动，现有一个求外接球表面积的问题，活动分为三个步骤，第一步认识平面图形：如图(一)所示的四边形 $PABC$ 中，$AB=BC=2$，$PA=PC$，$\angle ABC=60°$，$PA\perp PC$. 第二步：以 AC 为折痕将$\triangle PAC$ 折起，得到三棱锥 $P-ABC$，如图(二). 第三步：折成的二面角 $P-AC-B$ 的大小为 120°，则活动结束后计算得到三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为________.



图(一)



图(二)

15. 已知函数 $f(x)=ax+\mathrm{e}(a>0)$，$g(x)=x\mathrm{e}^x$，若 $\forall x_2\in(-\infty,1]$，$\exists x_1\in[-1,2]$，使 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，则实数 a 的取值范围是________.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-4x, x\leqslant 0\\ -\ln x, x>0\end{cases}$，若 $F(x)=f(f(x)-t)$ 有 5 个零点，则实数 t 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在锐角△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $b=2\sqrt{3}$，$2a\sin C\cos B=a\sin A-b\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}b\sin C$，△$ABC$ 的面积为 $\frac{9}{2}$.

(1)求 A；

(2)以 C 为圆心，r 为半径的圆与边 AB 有两个交点，求 r 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

在①$a_1+a_2+\cdots+a_n=2^{n+1}-2$；②$a_1a_2a_3\cdots a_n=2^{\frac{n^2+n}{2}}$两个条件中任选一个，补充在下面的横线上并作答.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若________，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)当 $n\in\left[\frac{a_k}{2},\frac{a_{k+1}}{2}\right)$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时，求区间 $\left[\frac{a_k}{2},\frac{a_{k+1}}{2}\right)$ 上所有整数 n 的和 T 的表达式.

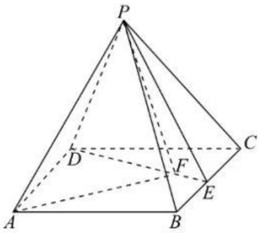
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为菱形,$AB=2$,$\angle BAD=60^{\circ}$,$\triangle PBC$ 为正三角形.点 E 为 BC 的中点,点 F 在线段 DE 上运动.

(1)求证:$BC\perp PF$;

(2)若二面角 $A-BC-P$ 的大小为 60°,当 $3\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{DF}$时,求证:直线 PB 与平面 PAF 所成的角小于$\frac{\pi}{6}$.



20.(本小题满分 12 分)

某商场在"五一"期间开展有奖促销活动,规则如下:对一次性购买物品超过 2 000 元的参与者,该商场现有以下两种方案可供选择:

方案一:在一个放有大小相同的 3 个红球和 3 个白球的不透明的箱子中,参与者随机摸出一个球,若是红球,则放回箱子中;若是白球,则不放回,再向箱子中补充一个红球,这样反复进行 3 次,若最后箱子中红球的个数为 X,则该参与者获得奖金 X 百元;

方案二:在一个放有大小相同的 3 个红球和 3 个白球的不透明的箱子中,参与者一次性摸出 3 个球,把白球换成红球再全部放回袋中,设袋中红球个数为 Y,则该参与者获得奖金 Y 百元.

(1)若用方案一,求 X 的分布列与数学期望;

(2)若你是参与者,从期望的角度出发,你会选择哪种参考方案?请说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$上一点 $M(m,1)$到焦点的距离为 2.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)过点$(-1,0)$的直线交抛物线 C 于 A,B 两点,点 $Q(0,-2)$,连接 QA 交抛物线 C 于另一点 E,连接 QB 交抛物线 C 于另一点 F,且$\triangle QAB$ 与$\triangle QEF$ 的面积之比为 1∶3,求直线 AB 的方程.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ae^x-x^2+3(a\in\mathbf{R})$.

(1)若方程 $f(x)=0$ 有 3 个零点，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $\varphi(x)=-x^2+2x+4-f(x)$有两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，求证：$0<a<\frac{2\sqrt{e}}{e}$，且$\sqrt{\frac{2x_2+1}{2x_1+1}}<\frac{e^{x_2}-e^{-x_1}}{x_2+x_1}$.

关于我们