

秘密★启用前

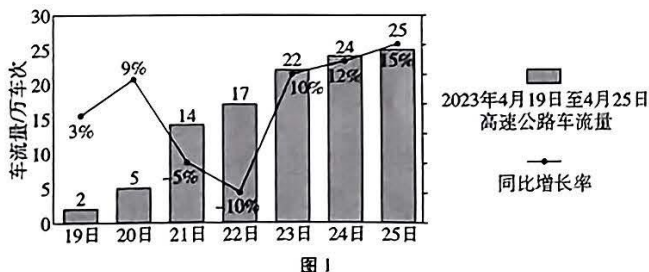
2023 届“3+3+3” 高考备考诊断性联考卷（三） 理科数学

注意事项：

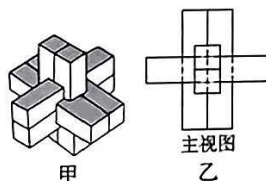
1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。在试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。满分 150 分，考试用时 120 分钟。

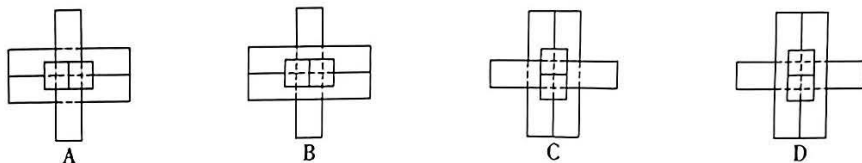
一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标为 $(1, 2)$ ，则 $zi =$
A. $2+i$ B. $-2+i$ C. $-2-i$ D. $1+2i$
2. $A = \{x | x \leq 2\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 4\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x | -2 \leq x \leq 4\}$
C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
3. 2023 年“三月三”期间，广西交通部门统计了 2023 年 4 月 19 日至 4 月 25 日的高速公路车流量（单位：万车次），并与 2022 年比较，得到同比增长率（同比增长率 = $\frac{\text{今年车流量} - \text{去年同期车流量}}{\text{去年同期车流量}} \times 100\%$ ）数据，绘制了如图 1 所示的统计图，则下列结论错误的是
的是

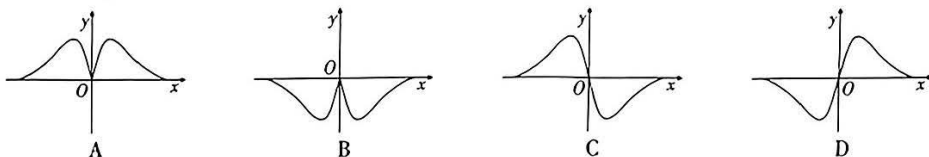


- A. 2023 年 4 月 19 日至 4 月 25 日的高速公路车流量的极差为 23
 - B. 2023 年 4 月 19 日至 4 月 25 日的高速公路车流量的中位数为 17
 - C. 2023 年 4 月 19 日至 4 月 21 日的高速公路车流量的标准差小于 2023 年 4 月 23 日至 4 月 25 日的高速公路车流量的标准差
 - D. 2022 年 4 月 23 日的高速公路车流量为 20 万车次
4. 榫卯，是一种中国传统建筑、家具及其他器械的主要结构方式，是在两个构件上采用凹凸部位相结合的一种连接方式。春秋时期著名的工匠鲁班运用榫卯结构制作出了鲁班锁，且鲁班锁可拆解，但是要将它们拼接起来则需要较高的空间思维能力和足够的耐心。如图 2 甲，六通鲁班锁是由六块长度大小一样，中间各有着不同镂空长条形木块组装而成。其主视图如图乙所示，则其侧视图为





5. 函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x^2+2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 的部分图象大致为



6. 若 $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处有极值, 则函数 $f(x)$ 的单调递增区间是

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(1, 2)$ D. $(\frac{1}{2}, 1]$

7. 如图 3, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AC=AA_1$, $\angle BAC=60^\circ$, 则 AB_1 与平面 AA_1C_1C 所成角的正弦值等于

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$
D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

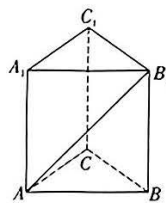


图 3

8. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 其中《方田》章给出计算弧田面积所用的经验公式为: 弧田面积 $= \frac{1}{2}(\text{弦} \times \text{矢} + \text{矢}^2)$, 弧田 (如图 4) 由圆弧和其所对弦所围成, 公式中“弦”指圆弧所对弦长, “矢”等于半径长与圆心到弦的距离之差. 现已知弧田面积为 $4\sqrt{3}+2$, 且弦是矢的 $2\sqrt{3}$ 倍, 按照上述经验公式计算所得弧田的弧长是

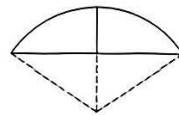


图 4

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{8\pi}{3}$

9. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, 直线 $y = \sqrt{3}kx (k \neq 0)$ 与椭圆交于 A, B 两点, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右两个焦点, 直线 AF_2 与椭圆交于另一个点 D , 则直线 AD 与 BD 的斜率乘积为

- A. $-\frac{4}{9}$ B. $-\frac{5}{9}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{9}$

10. 已知一圆锥内接于球, 圆锥的表面积是其底面面积的 3 倍, 则圆锥与球的体积之比是

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{9}{32}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x - \pi a), & x < a, \\ x^2 - 2ax + a^2 - 4, & x \geq a (a \in \mathbf{R}), \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内恰好有 4 个零点, 则 a 的取值范围是
- A. $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ B. $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ C. $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ D. $\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$
12. 已知正实数 a, b, c 分别满足 $a^2 = \frac{2}{e}, b = \ln 2, c = \frac{4\sqrt{2}}{3e}$, 其中 e 是自然常数, 则 a, b, c 的大小关系为
- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知平面向量 $\vec{a} = (m, -4), \vec{b} = (-1, m+3)$, 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则实数 m 的值为_____.
14. 从 $-3, -1, 1, 3$ 这四个数中随机选取两个数分别记为 k, b , 则直线 $y = kx + b$ 不经过第二象限的概率为_____.
15. 已知圆 C 的圆心为双曲线 T 的一个焦点 F , 半径为双曲线 T 的实半轴长. 若圆 C 与双曲线 T 的一条渐近线 l 交于点 M, N , 且 $\vec{MF} \cdot \vec{NF} = 0$, 则双曲线 T 的离心率为_____.
16. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 若 $\tan A < 0$, 则 $\frac{b(\sin C - \sin B)}{a \sin A}$ 的取值范围是_____.

三、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 当 $n \geq 2$ 时, 有 $(n-2)a_n - (n-1)a_{n-1} + a_1 = 0$.

- (1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;
(2) 若 $a_1 = 20, S_4 = 56$, 求 S_n 的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

如图 5 所示, 在四棱锥 $E-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \parallel CD, AB = \frac{1}{2}CD, CD \perp CE, \angle ADC = \angle EDC = 45^\circ, AD = \sqrt{2}, BE = \sqrt{3}$.

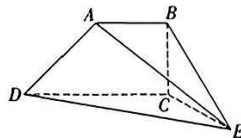


图 5

- (1) 求证: 平面 $ABE \perp$ 平面 $ABCD$;
(2) 求平面 ADE 与平面 BCE 所成二面角的余弦值.

19. (本小题满分 12 分)

为了“让广大青少年充分认识到毒品的危害性, 切实提升青少年识毒防毒拒毒意识”, 我市组织开展青少年禁毒知识竞赛, 团员小明每天自觉登录“禁毒知识竞赛 APP”, 参加各种学习活动, 同时热衷于参与四人赛. 每局四人赛是由网络随机匹配四人进行比赛, 每题回答正确得 20 分, 第 1 个达到 100 分的比赛者获得第 1 名, 赢得该局比赛, 该局比赛结束. 每天的四人赛共有 20 局, 前 2 局是有效局, 根据得分情况获得相应名次, 从而得到相应的学习积分, 第 1 局获得第 1 名的得 3 分, 获得第 2、3 名的得 2 分, 获得第 4 名的得 1 分; 第 2 局获得第 1 名的得 2 分, 获得第 2、3、4 名的得 1 分; 后 18 局是无效局, 无论获得什么名次, 均不能获得学习积分. 经统计, 小明每天在第 1 局四人赛中获得 3 分、2 分、1 分的概率分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, 在第 2 局四人赛中获得 2 分、1 分的概率分别为 $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$.

- (1) 设小明每天获得的得分为 X , 求 X 的分布列和数学期望;
 (2) 若小明每天赛完 20 局, 设小明在每局四人赛中获得第 1 名从而赢得该局比赛的概率为 $\frac{1}{4}$, 每局是否赢得比赛相互独立, 请问在每天的 20 局四人赛中, 小明赢得多少局的比赛概率最大?

20. (本小题满分 12 分)

实数 $k > 0$, $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = \frac{kx}{x+k}$.

- (1) 讨论 $f(x) - g(x)$ 的单调性并写出过程;
 (2) 求证: $\sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{k^2}} > n+1 - \frac{1}{n+1}$.

21. (本小题满分 12 分)

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是 C 上的一个动点 (不在 x 轴上), 射线 PF_1, PF_2 分别与 C 交于点 A, B , 记 $\triangle PF_1F_2, \triangle PF_1B$ 的周长分别为 L_1, L_2 , 已知 $L_1 : L_2 = 3 : 4$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
 (2) 记 $\triangle PF_1F_2, \triangle PF_1B, \triangle PAB$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 求证: $\frac{S_2}{S_3 - S_2} + \frac{S_1}{S_2 - S_1}$ 是定值.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致, 在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = 1 + \sin\varphi, \end{cases}$ (φ 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{3}\cos\theta$, 其中 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

- (1) 求曲线 C_1 与曲线 C_2 的交点的极坐标;
 (2) 直线 $l: \theta = \frac{\pi}{6} (\rho \in \mathbf{R})$ 与曲线 C_1, C_2 分别交于 M, N 两点 (异于极点 O), P 为 C_2 上的动点, 求 $\triangle PMN$ 面积的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

已知关于 x 的不等式 $|x+3| + 3m \geq m^2 - |x-1|$ 对任意实数 x 恒成立.

- (1) 求实数 m 的取值范围;
 (2) 记实数 m 的最小值为 M , 若 a, b 均为正实数, 且 $a+b+2M=0$, 求证: $\frac{1}{a+1} + \frac{4}{b+1} \geq \frac{9}{4}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

