2022-2023 学年下学期高二期末摸底考试

数 学 答 案

1．C　　由题设 $A=\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$， $B=\{x\,|\,x>0\}$，所以 $A\cap B=(0,1]$.

2．A　　$z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1-2\mathrm{i}$，$\bar{z}=1+2\mathrm{i}$ ；

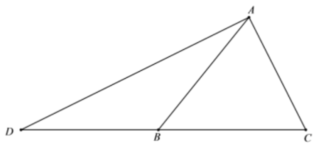
3．B　　设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q

$\because a_2=b_2=2\ \therefore a_1+d=b_1\cdot q$， 又$a_1=b_1\ \therefore a_1+d=a_1\cdot q=2$

又$\because b_5=b_1\cdot q^4=a_1\cdot q^4=(a_1\cdot q)\cdot q^3=2q^3=16\ \therefore q=2$， $a_1=1, d=1$

4．C　由题意可得：$\dfrac{P(X=1)}{P(X=8)}=\dfrac{\lg 2}{\lg\dfrac{9}{8}}=\dfrac{\lg 2}{\lg 9-\lg 8}=\dfrac{\lg 2}{2\lg 3-3\lg 2}\approx\dfrac{0.301}{3\times 0.477-3\times 0.301}\approx 6$.

5．D　$\because \overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，$\therefore B$ 为CD的中点，



$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，

6．B　　设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1\left(a>\sqrt{3}\right)$的半短轴长为$b$，半焦距为$c$，

则$b=\sqrt{3}$，$\triangle AF_1F_2$的面积$S=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot b=\sqrt{3}c$　　由题知$\sqrt{3}c=\sqrt{3}$，所以$c=1$，

$a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，由椭圆的定义知$|AF_1|+|AF_2|=2a=4$，又$|F_1F_2|=2c=2$，

所以$\triangle AF_1F_2$的周长为$4+2=6$.

7．A　　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{4}<\sin 1<1=\log_2 2<\log_2\pi$，$\therefore a>b>c$.

8．D　　由$f(x)<1+\dfrac{3}{e^x}$得$e^x f(x)<e^x+3$,即$e^x f(x)-e^x-3<0$,令$F(x)=e^x f(x)-e^x-3$,

则$F'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)-e^x=e^x\left[f(x)+f'(x)-1\right]$

因为$f(x)<1-f'(x)$,即$f(x)+f'(x)-1<0$,且$\mathrm{e}^x>0$,所以$F'(x)<0$,

故函数$F(x)$在R上单调递减,由$F(0)=e^0 f(0)-e^0-3=4-1-3=0$,

故$F(x)<0$，即$f(x)<1+\dfrac{3}{e^x}$的解集是$(0,+\infty)$.

9．AB　对于 A，由相关指数的定义知：R^2 越大，模型的拟合效果越好，A 正确；对于 B，残差点所在的带状区域宽度越窄，则残差平方和越小，模型拟合精度越高，B 正确；对于 C，由独立性检验的思想知：χ^2 值越大，“x 与 y 有关系”的把握程度越大，C 错误. 对于 D，$\because E(3X+1)=3E(X)+1=6$，$\therefore E(X)=\frac{5}{3}$，又$\because X\sim B\left(n,\frac{1}{3}\right)$，$\therefore E(X)=\frac{n}{3}=\frac{5}{3}$，解得：$n=5$，D 错误.

10．ABD　解：因为 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\because$ 函数的最小正周期是 π，$\therefore T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore \omega=2$，$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\because f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(2\times\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\pi=0$，$\therefore f(x)$ 关于 $\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$ 对称，故 A 正确.

$\because f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos 2x$，$\therefore f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$ 关于 y 轴对称，故 B 正确.

当 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时，有 $0\le 2x\le\pi$，则 $\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5}{4}\pi$，所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，

$\therefore f(x)\in\left[-1,\sqrt{2}\right]$，故 C 错误.　由 $-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}$，解得 $-\frac{3}{8}\pi\le x\le\frac{\pi}{8}$，

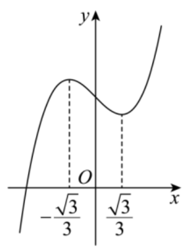
所以 $f(x)$ 的一个单调增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$，而 $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]\subseteq\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ 上单调递增，故 D 正确.

11．CD　函数 $f(x)=x^3-x+2$，定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=3x^2-1$，

$f'(x)>0$，解得 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$；$f'(x)<0$，解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减，



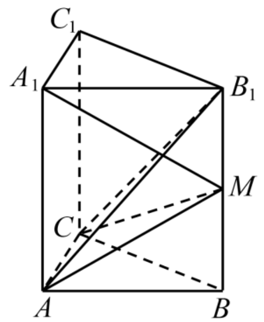
极大值为 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2+\frac{2\sqrt{3}}{9}$，极小值为 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，

$f(-2)=-4<0$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，函数图像如图所示，

则函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴只有一个交点，即 $f(x)$ 只有一个零点，

所以 AB 选项错误，C 选项正确；曲线 $y=f(x)$ 切线的切点坐标为 $(x_0,f(x_0))$，当切线斜率为 2 时，$f'(x_0)=3x_0^2-1=2$，解得 $x_0=\pm1$，当 $x_0=1$ 时，切点坐标为 $(1,2)$，切线方程为 $y-2=2(x-1)$，即 $y=2x$，D 选项正确.

12．ABD　　由题设，可得如下直三棱柱：



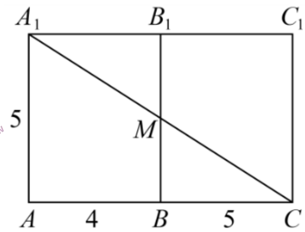
由直三棱柱的结构特征知：AM 与 A_1C_1 是异面直线，A 正确；

因为 $AA_1\perp AC$，$BA\perp AC$，且 $AA_1\cap BA=A$，则 $AC\perp$ 面 AA_1B_1B，

又 $A_1M\subset$ 面 AA_1B_1B，故 $AC\perp A_1M$，B 正确；

由图知：面 AB_1C 将三棱柱截成四棱锥 $B_1-ACC_1A_1$ 和三棱锥 B_1-ABC，一个五面体和一个四面体，C 错误；

将面 AA_1B_1B 和面 CC_1B_1B 展开展开为一个平面，如下图：



当 A_1,M,C 共线时，A_1M+MC 最小为 $\sqrt{106}$，D 正确.

13．$2\sqrt{5}$　　$\vec{a}+2\vec{b}=(\sqrt{3},1)+2(1,-\sqrt{3})=(\sqrt{3}+2,1-2\sqrt{3})$，所以模长为 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2+(1-2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{5}$.

14．$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$（答案不唯一）∵ $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，∴ $f(-x)=f(x)$，

又 $f(1+x)=f(3-x)$，∴用 $3+x$ 替换 x，得 $f(x+4)=f(-x)$，

∴ $f(x+4)=f(x)$，∴ $f(x)$ 的周期为 4，则 $f(x)$ 的一个解析式可以为 $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

15．0.0525　　它是次品的概率为 $0.25\times0.06+0.3\times0.05+0.45\times0.05=0.0525$.

16．$159, 2\times3^{\frac{n}{2}}-3$

因为在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}3a_n, n\text{为奇数}\\ a_n+2, n\text{为偶数}\end{cases}$，

所以$a_2=3a_1=3$，$a_3=a_2+2=5$，$a_4=3a_3=15$，$a_5=a_4+2=17$，

$a_6=3a_5=51$，$a_7=a_6+2=53$，$a_8=3a_7=159$，

令$n=2k-1$，则$a_{2k}=3a_{2k-1}$，$a_{2k+2}=3a_{2k+1}$，令$n=2k$，则$a_{2k+1}=a_{2k}+2$，

所以$a_{2k+2}=3a_{2k}+6$，所以$a_{2k+2}+3=3(a_{2k}+3)$，

所以数列$\{a_{2k}+3\}$是以 3 为公比，6 为首项的等比数列，

所以$a_{2k}+3=6\times 3^{k-1}=2\times 3^k$，所以$a_{2k}=2\times 3^k-3$，所以$a_n=2\times 3^{\frac{n}{2}}-3$，

17．(1)$\sqrt{3}$　　(2)$\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

（1）在△ABD中，$\angle ABD=180°-(45°+105°)=30°$，

由正弦定理得$AB=\dfrac{AD\cdot\sin 45°}{\sin 30°}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{3}$．

（2）在$\triangle ABC$中，由余弦定理得

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\times BC}=\frac{(\sqrt{3})^2+2^2-3^2}{2\sqrt{3}\times 2}=-\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$\therefore \sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$．

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times AB\times BC\times\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{33}}{6}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$．

18．(1) $a_n=2n-1$，　　(2) $2n^2+n$

（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，又$a_1=1$，所以$a_n=1+(n-1)d$．

因为a_1,a_2,a_5是一个等比数列的前三项，所以$a_1a_5=a_2^2$．

即$1+4d=(1+d)^2$又$d\neq 0$，所以$d=2$　所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$，$n\in\mathbb{N}^*$

（2）由（1）知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{1+2n-1}{2}\times n=n^2$

所以$(-1)^nS_n=(-1)^nn^2$，数列$\{(-1)^nS_n\}$的前$2n$项的和为

$$\left(-1^2\right)+2^2+\left(-3^2\right)+4^2+\cdots-(2n-1)^2+(2n)^2=1+2+3+4+\cdots+(2n-1)+2n=\frac{1+2n}{2}\times 2n=2n^2+n$$

19．(1)答案见解析　(2)答案见解析

（1）样本中爱好飞盘运动的年轻人中男性 16 人，女性 24 人，比例为$4:6$，

按照性别采用分层抽样的方法抽取 10 人，则抽取男性 4 人，女性 6 人.

随机变量X的取值为:$0,1,2,3$.

$$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6},\ P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2},\ P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10},\ P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30},$$

随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

随机变量X的数学期望$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$.

（2）零假设为H_0:爱好飞盘运动与性别无关联.

根据列联表重的数据，经计算得到$\chi^2=\frac{50\times(6\times24-4\times16)^2}{10\times40\times22\times28}\approx1.299<6.635=x_{0.01}$,

根据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验，没有充分证据推断H_0不成立，因此可以认为H_0成立，即认为爱好飞盘运动与性别无关联.

列联表中所有数据都扩大到原来的 10 倍后，

$$\chi^2=\frac{500\times(60\times240-40\times160)^2}{100\times400\times220\times280}\approx12.99>6.635=x_{0.01},$$

根据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验，推断H_0不成立，即认为爱好飞盘运动与性别有关联.

所以结论不一样，原因是每个数据都扩大为原来的 10 倍，相当于样本量变大为原来的 10 倍，导致推断结论发生了变化.

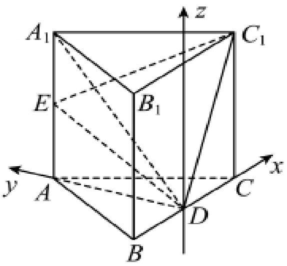
20．(1)证明见解析　(2)$\frac{\sqrt{3}}{6}$

（1）$\because$ 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$\therefore AA_1\perp$ 平面ABC，$\therefore BC\perp AA_1$，

又$\because D$ 为 BC 的中点，$\therefore AD\perp BC$，$\therefore BC\perp$ 平面A_1AD

（2）因为 $AC=BC$，D 为 BC 的中点，$AD\perp BC$，所以 $AB=AC$，

$\therefore \triangle ABC$ 为正三角形，如图建立空间坐标系，由（1）易知平面 A_1ED 法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$，



设 $AE=h$，$\because \overrightarrow{DE}=\left(0,\sqrt{3},h\right)$，$\overrightarrow{DC_1}=\left(1,0,2\right)$，

设平面 DEC_1 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\left(x,y,z\right)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}y+hz=0\\ x+2z=0\end{cases}$，取 $\overrightarrow{n_2}=\left(-2\sqrt{3},-h,\sqrt{3}\right)$，

由 $\cos30^\circ=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(-h)^2+15}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $h=1$ 或 $h=-1$（舍去），

$\because S_{\triangle A_1ED}=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，点 C_1 到平面 A_1ED 距离为 1，

$\therefore$ 以 A_1,E,D,C_1 为顶点的四面体体积为 $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

21．(1) $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　(2) $Q(1,0)$

（1）双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $\sqrt{3}x+y=0$，所以 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，

左焦点 F 到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{\left|-\sqrt{3}c\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=\sqrt{3}$，又 $c^2=a^2+b^2$，

联立得 $\begin{cases}c^2=a^2+b^2\\ c=2\\ b=\sqrt{3}a\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}a=1\\ c=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设直线 l_1 的方程为 $y=k\left(x+2\right)(k\neq\pm\sqrt{3})$，令 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases}y=k\left(x+2\right)\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，整理得，$(3-k^2)x^2-4k^2x-4k^2-3=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{3-k^2}$，所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k^2}{3-k^2}$，

$\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{k\left(x_1+x_2+4\right)}{2}=\dfrac{6k}{3-k^2}$，则 $D(\dfrac{2k^2}{3-k^2},\dfrac{6k}{3-k^2})$，

设直线 l_2 的方程为 $y=\dfrac{-1}{k}\left(x+2\right)(k\neq\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，令 $C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$

联立 $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{k}\left(x+2\right) \\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，整理得 $(3k^2-1)x^2-4x-3k^2-4=0$，

所以 $x_3+x_4=\dfrac{4}{3k^2-1}$，所以 $\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{2}{3k^2-1}$，

$\dfrac{y_3+y_4}{2}=\dfrac{-\dfrac{1}{k}\left(x_3+x_4+4\right)}{2}=\dfrac{-6k}{3k^2-1}$，则 $E(\dfrac{2}{3k^2-1},\dfrac{-6k}{3k^2-1})$，

当 $\dfrac{2k^2}{3-k^2}=\dfrac{2}{3k^2-1}$，即 $k=\pm1$ 时，直线 DE 的方程为 $x=1$．

当 $k\neq\pm1$，$k\neq\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$k\neq\pm\sqrt{3}$ 时，

直线 DE 的斜率为 $\dfrac{\dfrac{6k}{3-k^2}-\dfrac{-6k}{3k^2-1}}{\dfrac{2k^2}{3-k^2}-\dfrac{2}{3k^2-1}}=\dfrac{2k}{k^2-1}$，

直线 DE 的方程为 $y-\dfrac{6k}{3-k^2}=\dfrac{2k}{k^2-1}(x-\dfrac{2k^2}{3-k^2})$，即 $y=\dfrac{2k}{k^2-1}(x-1)$，

所以直线 DE 过点 $Q(1,0)$，又直线 $x=1$ 过点 $Q(1,0)$，综上，直线 DE 过定点 $Q(1,0)$.

22．(1)单调递减区间为 $\left(0,+\infty\right)$　(2) $\left[1,+\infty\right)$

（1）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f\left(x\right)=2x\ln x-x^2$，所以 $f'\left(x\right)=2\ln x-2x+2$，

令 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)=2\ln x-2x+2$，所以 $g'\left(x\right)=\dfrac{2}{x}-2$，

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$，故 $g\left(x\right)$ 为增函数；

当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，故 $g\left(x\right)$ 为减函数，

所以 $g\left(x\right)\leq g\left(1\right)=2\ln1-2+2=0$，即 $f'\left(x\right)\leq0$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$，无单调递增区间.

（2）因为 $f(x)=2x\ln x-2ax^2$，所以 $f'(x)=2\ln x-4ax+2$，

所以 $f(x)\le\dfrac{f'(x)}{2}-\ln x-1$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

即 $2(x\ln x-ax^2)\le\ln x-2ax+1-\ln x-1$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

转化为 $\ln x-ax+a\le0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x)=\ln x-ax+a$，$x\in(1,+\infty)$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-a$ 且 $h(1)=0$

当 $a\le0$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，故 $h(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $h(x)>h(1)=0$，即 $a\le0$ 时不满足题意；

当 $a>0$ 时，由 $h'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{a}$，

若 $a\in(0,1)$，则 $\dfrac{1}{a}\in(1,+\infty)$，故 $h(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上为减函数，在 $\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$ 上为增函数，

所以存在 $x_0\in\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$，使得 $h(x_0)>h(1)=0$，即 $a\in(0,1)$ 时不满足题意；

若 $a\in[1,+\infty)$，则 $\dfrac{1}{a}\in(0,1]$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为减函数，

所以 $h(x)<h(1)=0$，所以 $h(x)\le0$ 恒成立，

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.