超级全能生® 教学考试

秘密★启用前

超级全能生2023高考全国卷地区高三年级3月联考

数 学(文科)

考生注意:

1. 本试卷共2页。满分150分,考试时间120分钟。
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡的相应位置。
3. 全部答案在答题卡上完成,答在本试题卷上无效。
4. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
5. 考试结束后,将本试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|\frac{x-12}{x+1}<0\}$,$B=\{x|x=3n+1,n\in Z\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{4,7,10\}$　B. $\{-3,-2,-1,0\}$　C. $\{1,4,7,10\}$　D. $\{-4,-3,-2,-1\}$

2. 复数 $z=\frac{i-3}{i+1}$(i为虚数单位)在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

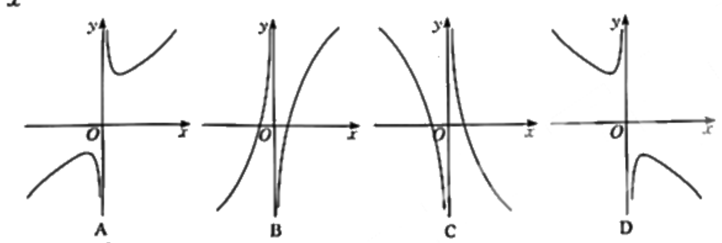
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$,$\boldsymbol{b}=(x,5)$,若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,则 $|\boldsymbol{b}|=$

A. 4　B. 6　C. $2\sqrt{6}$　D. $\sqrt{26}$

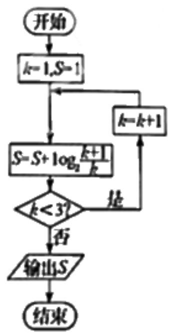
4. "$x>y>0$"是"$\frac{1}{(x-y)y}>\frac{1}{x^2}$"成立的

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

5. 函数 $f(x)=\frac{3x^2+x\sin x-1}{x}$ 的大致图象可能是



6. 执行如图所示的程序框图,则输出的 S 为



A. $\log_2 3$　B. $1+\log_2 3$　C. 3　D. $1+\log_2 5$

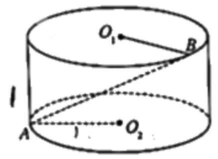
7. 已知锐角△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $\frac{a\sin C}{b\cos A+a\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $C=$

A. 60°　B. 65°　C. 75°　D. 85°

8. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,$A(4,n)$ 为 C 上一点,且 $|AF|=5$,延长 AF 与 C 交于点 B,则 $|AB|=$

A. $\frac{25}{4}$　B. $\frac{21}{4}$　C. 6　D. 7

9. 如图,已知圆柱 O_1O_2 的底面半径和母线长均为1,B,A 分别为上、下底面圆周上的点,若异面直线 O_1B 与 O_2A 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$,则 $AB=$



A. 1
B. $\sqrt{2}$
C. 1或2
D. 2或$\sqrt{2}$

10. 将函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象,若 $g(x)$ 的图象关于原点中心对称,则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称　B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 对称
C. $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 上单调递减　D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 上单调递减

11. 在平面直角坐标系 xOy 中,双曲线 $M:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2,将线段 F_1F_2 绕原点按逆时针方向旋转,分别交双曲线的左、右支于 B、A 两点,使得 $|AB|=|F_1F_2|$,直线 AF_2 交双曲线的右支于另一点 C,若 $|BF_2|=|F_2C|$,则该双曲线的离心率为

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　C. $\frac{5}{2}$　D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

12. 已知函数 $f(x)=a^x\ln a-ex(0<a<1)$ 有两个零点,则实数 a 的取值范围是

A. $(\frac{1}{e},\frac{2}{e})$　B. $(0,\frac{1}{e})$　C. $(0,1)$　D. $(\frac{1}{e},1)$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 曲线 $f(x)=2x^3-\ln x$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为______。

14. 若实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases}x+y\geq 0,\\ y-2x\geq 2,\\ x+3y\leq 3,\end{cases}$ 则 $\frac{y}{x+2}$ 的最大值为______。

15. 已知函数 $f(x)$ 的图象关于 $(0,1)$ 对称,函数 $g(x)=f(x)+\frac{x^3}{\ln|x|}$,若 $g(a)=2\ 023$,则 $g(-a)=$______。

16. 在三棱锥 $A-BCD$ 中,底面△BCD 是等边三角形,$AD\perp$ 底面 BCD,$BC=\sqrt{3}$,$AD=3$,则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的体积为______。

三、解答题:共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共60分。

17. (本小题满分12分)

已知各项均不相等的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $S_3=9$,a_1,a_2,a_5 成等比数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n=(a_n+1)\cdot 2^{n-1}$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

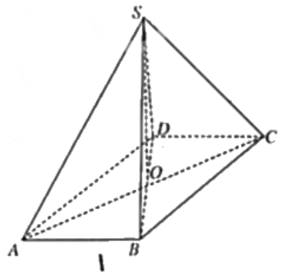
密 封 线 内 不 要 答 题

18.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，AC 与 BD 交于点 O，$SO\perp$ 底面 $ABCD$，$AB=1$，$AD=SO=3$，$\cos\angle BAD=\frac{1}{3}$.

(1)证明：$CD\perp SD$；

(2)求异面直线 AD 与 SB 所成角的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

据日本广播协会(NHK)此前报道，日本政府于 2023 年 1 月 13 日称，将于 2023 年春夏期间将福岛第一核电站 1 000 多个储罐中储存的核废水稀释后排放入海. 上述决定，遭到包括福岛民众、日本渔民乃至国际社会的谴责和质疑. 德国海洋科学研究机构指出，福岛沿岸拥有世界上最强的洋流，从排放之日起 57 天内，放射性物质将扩散至太平洋大半区域，10 年后蔓延全球海域. 绿色和平组织核专家指出，日核废水所含碳 14 在数千年内都存在危险，并可能造成基因损害. 此消息一经发布，某志愿者组织便在网上组织“反对日本核污水处理水入海”投票活动，并统计投票第 x 天与当天的投票人数 y(单位：万人)如下表所示：

x	1	2	3	4	5
y	4.5	5.6	6.4	6.8	7.2

(1)已知 y 与 x 具有较强的线性相关关系，求 y 关于 x 的线性回归方程；

(2)该志愿者组织为了了解大众对核污染危害的了解程度，随机调研了 200 名社会人员，并对调研结果进行了统计，其中 45 周岁以上的人数占调研总人数的 45%，了解核污染危害的人数占调研总人数的 75%. 在不了解核污染危害的人中，45 周岁以下(含 45 周岁)的人数占 40%. 完成下列 2×2 列联表，并判断是否有 99% 的把握认为大众对核污染危害的了解程度与年龄有关?

	了解	不了解	总计
45 周岁以下(含 45 周岁)			
45 周岁以上			
总计			

参考公式及数据：线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，实轴长为 4.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)记 C 的上顶点为 P，已知直线 l 的斜率为 k，若直线 l 与 C 交于 E、F 两点，且 $|PE|=|PF|$，求实数 k 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-ae^x+2x-1(a>0)$ 的导函数为 $f'(x)$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值点的个数；

(2)若 $f(x)-f'(x)>a\ln x+\frac{1}{2}a-3$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22,23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4－4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)，以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=\frac{4}{\sin\theta+\cos\theta}$.

(1)求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2)若点 P 是曲线 C_1 上一点，求点 P 到曲线 C_2 的距离的取值范围.

23.[选修 4－5：不等式选讲]（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=|2x-1|-|x-1|$.

(1)求不等式 $f(x)<1$ 的解集；

(2)设 $f(x)$ 的最小值为 m，若正实数 a,b 满足 $a+b+2m=0$，求 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的取值范围.

3319C

超级全能生2023高考全国卷地区高三年级3月联考·数学(文科)

参考答案、提示及评分细则

1. C　集合 $A=\{x|-1<x<12\}$, $B=\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$, ∴ $A\cap B=\{1,4,7,10\}$, 故选 C.

2. B　复数 $z=\frac{i-3}{i+1}=\frac{(i-3)(i-1)}{(i+1)(i-1)}=2i-1$, ∴在复平面内复数 z 所对应的点为 $(-1,2)$, 该点位于第二象限, 故选 B.

3. D　∵ $\boldsymbol{a}=(2,3)$, $\boldsymbol{b}=(x,5)$, 若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$, ∴ $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(2-x,-2)\cdot(2,3)=4-2x-6=0$, 解得 $x=-1$, ∴ $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$, 故选 D.

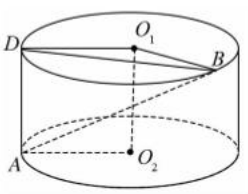
4. A　由 $x>y>0$ 得 $x>x-y>0$, ∴ $\frac{1}{x-y}>\frac{1}{x}>0$, 又 $\frac{1}{y}>\frac{1}{x}>0$, ∴ $\frac{1}{(x-y)y}>\frac{1}{x^2}$, 故充分性得证; ∵ $\frac{1}{(x-y)y}>\frac{1}{x^2}$, ∴ $0<(x-y)y<x^2$, 取 $x=-2$, $y=-1$, 满足 $0<(x-y)y<x^2$, 但 $x<y<0$, 故必要性不成立. 综上, “$x>y>0$”是“$\frac{1}{(x-y)y}>\frac{1}{x^2}$”成立的充分不必要条件, 故选 A.

5. B　由题可得 $f(x)=3x-\frac{1}{x}+\sin x$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$, 且 $f(-x)=-f(x)$, ∴ $f(x)$ 是奇函数, 其函数图象关于原点对称, 又 $f'(x)=3+\frac{1}{x^2}+\cos x>0$, ∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 故选 B.

6. C　初始值 $k=1$, $S=1+\log_2 2$, 第一次循环 $k=2$, $S=1+\log_2 2+\log_2\frac{3}{2}$, 第二次循环 $k=3$, $S=1+\log_2 2+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}=3$, 退出循环, 输出的 S 值为 3. 故选 C.

7. C　∵ $\frac{a\sin C}{b\cos A+a\cos B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\sqrt{3}(b\cos A+a\cos B)=2a\sin C$, 由正弦定理得 $\sqrt{3}(\sin B\cos A+\sin A\cos B)=2\sin A\sin C$, ∴ $\sqrt{3}\sin(A+B)=2\sin A\sin C$, ∴ $\sqrt{3}\sin C=2\sin A\sin C$, 又 $\sin C\neq0$, ∴ $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 又△$ABC$ 是锐角三角形, ∴ $A=60^\circ$, ∵ $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ∴ $B=45^\circ$, ∴ $C=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$, 故选 C.

8. A　依题意, 抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的准线为 $x=-\frac{p}{2}$, ∵ $A(4,n)$ 为 C 上一点, 且 $|AF|=5$, 则 $|AF|=4+\frac{p}{2}=5$, 解得 $p=2$, ∴抛物线 $C: y^2=4x$, 焦点为 $F(1,0)$, ∵ A 为 C 上一点, 则 $n^2=4\times4$, ∴ $n=\pm4$, 由抛物线的对称性, 不妨取 $A(4,4)$, ∴直线 AF 的方程为 $y=\frac{4}{3}(x-1)$, 代入 $C: y^2=4x$, 得 $\frac{16}{9}(x-1)^2=4x$, 整理得 $4x^2-17x+4=0$, 解得 $x=\frac{1}{4}$ 或 $x=4$, ∴ $|AB|=\frac{1}{4}+1+5=\frac{25}{4}$, 故选 A.

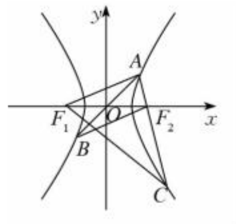


9. D　如图, 过点 A 作 $AD\perp$ 底面 O_1 于点 D, 即 AD 是母线, 连接 DB, ∵ $O_1O_2\perp$ 底面 O_1, ∴ $AD \mathrel{\underline{\parallel}} O_1O_2$, ∴四边形 ADO_1O_2 是平行四边形, $O_1D/\!/O_2A$, O_2A 与 O_1B 所成的角就是 $\angle DO_1B$ 或其补角, 当 $\angle DO_1B=\frac{\pi}{3}$ 时, △DO_1B 是等边三角形, $BD=1$, 在 Rt△ABD 中, $AB=$

$\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{2}$；当$\angle DO_1B=\frac{2\pi}{3}$时，在$\triangle O_1DB$中，$BD=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，$AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=2$. 综上，$AB=2$或$\sqrt{2}$，故选 D.

10. C　将$f(x)=\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位后得到的函数是$g(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi)$，由题意得$\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，$\therefore f(\frac{\pi}{6})=0$，$\therefore f(x)$的图象不关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，故 A 错误；$f(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq0$，$\therefore f(x)$的图象不关于点$(\frac{\pi}{3},0)$对称，故 B 错误；$g(x)=\sin 2x$，当$x\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$时，$2x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$，由正弦函数的图象可知，$g(x)$在$(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$上单调递减，故 C 正确；当$x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in(0,\frac{\pi}{3})$，由正弦函数的图象可知，$f(x)$在$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$上单调递增，故 D 错误，故选 C.

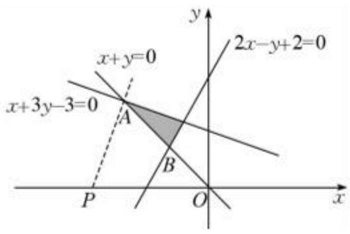
11. D　如图，连接AF_1，CF_1，由双曲线的对称性得$|BF_2|=|AF_1|$，由$|OA|=|OF_1|=|OF_2|$得$AF_1\perp AF_2$，设$|AF_1|=m$，$|AF_2|=n$，则$\begin{cases}m-n=2a\\m^2+n^2=4c^2\end{cases}$，$2mn=4c^2-4a^2=4b^2$，又$|CF_1|-|CF_2|=2a$，即$|CF_1|=2a+m$，从而由$|AF_1|^2+|AC|^2=|CF_1|^2$得$m^2+(m+n)^2=(2a+m)^2$，$4c^2+4b^2=4a^2+4am$，$\therefore m=\frac{2b^2}{a}$，$\therefore n=\frac{2b^2}{a}-2a$，$\therefore m^2+n^2=\frac{4b^4}{a^2}+(\frac{2b^2}{a}-2a)^2=4c^2$，化简得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{2}$，$\therefore$该双曲线的离心率为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，故选 D.



12. D　易知$f'(x)=a^x(\ln a)^2-\mathrm{e}$，当$0<a<1$时，$f'(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减，$\therefore$存在$x_0$使得$f'(x_0)=0$，则$f(x)$在$(-\infty,x_0)$上单调递增，在$(x_0,+\infty)$上单调递减，且$x_0=\log_a\frac{\mathrm{e}}{(\ln a)^2}$，又当$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$；当$x\to-\infty$时，$f(x)\to-\infty$，$\therefore f(x_0)>0$，即$\frac{\mathrm{e}}{\ln a}>\mathrm{e}\log_a\frac{\mathrm{e}}{(\ln a)^2}$，$\therefore a^{\frac{1}{\ln a}}<\frac{\mathrm{e}}{(\ln a)^2}$，$\therefore\ln a^{\frac{1}{\ln a}}<\ln\frac{\mathrm{e}}{(\ln a)^2}$，$\therefore\frac{1}{\ln a}\ln a<1-\ln(\ln a)^2$，解得$\frac{1}{\mathrm{e}}<a<\mathrm{e}$. 又$0<a<1$，故$\frac{1}{\mathrm{e}}<a<1$，即实数$a$的取值范围是$(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$，故选 D.

13. $5x-y-3=0$　$f(1)=2$，$f'(x)=6x^2-\frac{1}{x}$，$\therefore f'(1)=5$，$\therefore$所求切线方程为$y-2=5(x-1)$，即$5x-y-3=0$.

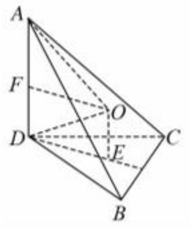
14. 3　作出可行域如图中阴影部分所示(包含边界)，$\frac{y}{x+2}$的几何意义为可行域内的点与点$P(-2,0)$连线所在直线的斜率，由图知，当目标函数$z=\frac{y}{x+2}$经过点$A(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$时，$z$取得最大值$z_{\max}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}+2}=3$.



15. $-2\,021$　$\because$函数$f(x)$的图象关于$(0,1)$对称，$\therefore$函数$y=f(x)-1$是奇函数，函数$g(x)=$

$f(x)+\frac{x^3}{\ln|x|}$，而 $y=\frac{x^3}{\ln|x|}$ 是奇函数，∴函数 $g(x)-1=f(x)+\frac{x^3}{\ln|x|}-1$ 为奇函数，∴$g(-a)-1=-[g(a)-1]$，若 $g(a)=2\ 023$，则有 $g(-a)=-2\ 021$.

16. $\frac{13\sqrt{13}\pi}{6}$　如图，设三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O，$\triangle BCD$ 的外心为 E，则 $OE\perp$ 平面 BCD. 因为 $AD\perp$ 平面 BCD，则 $OE/\!/AD$. 取 AD 的中点 F，因为 $OA=OD$，则 $OF\perp AD$，所以 $OE=DF=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$. $DE=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$. 在 $\text{Rt}\triangle OED$ 中，$DO=\sqrt{1+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，所以三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3}\cdot OD^3=\frac{13\sqrt{13}\pi}{6}$.



17. 解：(1)∵a_1,a_2,a_5 成等比数列，

∴$a_2^2=a_1a_5$，即 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$，

又 $d\neq 0$，∴$d=2a_1$. ………… 2分

∵$S_3=3a_2=9$，

∴$a_2=a_1+d=3a_1=3$，

∴$a_1=1,d=2$，………… 4分

∴$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ………… 6分

(2)$b_n=(a_n+1)\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n$，

∴数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$，①

∴$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$，② ………… 8分

∴①−②得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times 2^{n+1}=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n\times 2^{n+1}=(1-n)\times 2^{n+1}-2$，

………… 11分

∴$T_n=(n-1)\times 2^{n+1}+2$. ………… 12分

18. (1)证明：∵$SO\perp$ 底面 $ABCD$，$CD\subset$ 底面 $ABCD$，

∴$SO\perp CD$. ………… 1分

在$\triangle ABD$ 中，$AB=1,AD=3,\cos\angle BAD=\frac{1}{3}$，

由余弦定理得 $\cos\angle BAD=\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\frac{9+1-BD^2}{2\times 3\times 1}=\frac{1}{3}$，

∴$BD=2\sqrt{2}$，………… 3分

∴$AB^2+BD^2=AD^2$，∴$AB\perp BD$. ………… 4分

在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，∴$CD\perp BD$.

又 $SO\cap BD=O$，∴$CD\perp$ 平面 SBD，

又 $SD\subset$ 平面 SBD，∴$CD\perp SD$. ………… 6分

(2)解：在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，

∴异面直线 AD 与 SB 所成角即$\angle SBC$ 或其补角. ………… 7分

∵$SO\perp$ 底面 $ABCD$，

∴$SO\perp AC,SO\perp BD$，

又 $OB=OD=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，$OA=OC=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，$SO=3$，

∴$SC=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$，$SB=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}$，………… 9分

在△SBC中，由余弦定理得 $\cos\angle SBC=\dfrac{SB^2+BC^2-SC^2}{2SB\cdot BC}=\dfrac{11+9-12}{2\times\sqrt{11}\times3}=\dfrac{4\sqrt{11}}{33}$,

∴异面直线 AD 与 SB 所成角的余弦值为 $\dfrac{4\sqrt{11}}{33}$. ………………………………… 12 分

19. 解：(1)由题意得，$\overline{x}=\dfrac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$，$\overline{y}=\dfrac{1}{5}\times(4.5+5.6+6.4+6.8+7.2)=6.1$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=1\times4.5+2\times5.6+3\times6.4+4\times6.8+5\times7.2=98.1$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$， ………………………………… 2 分

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{98.1-5\times3\times6.1}{55-5\times3^2}=0.66$，………………………………… 4 分

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=6.1-0.66\times3=4.12$， ………………………………… 5 分

∴y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.66x+4.12$. ………………………………… 6 分

(2)由题意得如下 2×2 列联表：

	了解	不了解	总计
45 周岁以下(含 45 周岁)	90	20	110
45 周岁以上	60	30	90
总计	150	50	200

………………………………………………………………… 9 分

$K^2=\dfrac{200\times(90\times30-60\times20)^2}{110\times90\times150\times50}\approx6.061<6.635$， ………………………………… 11 分

∴没有 99%的把握认为大众对核污染危害的了解程度与年龄有关. ………………… 12 分

20. 解：(1)由题知，$\begin{cases}2a=4,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ b^2=a^2-c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3}.\end{cases}$ ………………………………… 2 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………… 3 分

(2)设直线 l：$y=kx+m$，

当 $k=0$ 时，显然成立. ………………………………… 4 分

当 $k\neq0$ 时，

①当 $m=0$ 时，显然不成立.

②当 $m\neq0$，即 $mk\neq0$ 时，

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+4y^2-4=0,\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8mkx+4m^2-4=0$. ………………………………… 6 分

因为直线 l 与椭圆 C 有两个交点，

所以 $\Delta=64m^2k^2-16(4k^2+1)(m^2-1)>0$.

即 $4k^2+1-m^2>0$.（*）

设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，线段 EF 的中点为 H，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8mk}{4k^2+1}$，

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{-8k^2m}{4k^2+1}+2m=\dfrac{2m}{4k^2+1}$.

所以 $H(\frac{-4mk}{4k^2+1},\frac{m}{4k^2+1})$.

直线 HP 的斜率 $k_{HP}=\dfrac{\frac{m}{4k^2+1}-1}{\frac{-4mk}{4k^2+1}}=\dfrac{m-4k^2-1}{-4mk}$,

由 $|PE|=|PF|$,得 $HP\perp EF$,

所以 $k_{HP}\cdot k=\dfrac{m-4k^2-1}{-4mk}\cdot k=-1$,

解得 $m=-\dfrac{4k^2+1}{3}$. …………………………………………………… 10 分

将 $m=-\dfrac{4k^2+1}{3}$代入到(*)中,得 $4k^2+1-\dfrac{(4k^2+1)^2}{9}>0$,

即 $1-\dfrac{4k^2+1}{9}>0$,

解得 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$,且 $k\neq 0$.

综上所述,实数 k 的取值范围是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. …………………………………… 12 分

21. 解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-e^x+2x-1$,

其定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f'(x)=x-e^x+2$, ………………………………………………… 1 分

令 $g(x)=x-e^x+2$,则 $g'(x)=1-e^x$,

∴当 $x<0$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;

当 $x>0$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,

∴$g(x)_{极大值}=g(0)=1>0$, ……………………………………………………………… 2 分

又 $g(-2)=-e^{-2}<0$,$g(2)=4-e^2<0$,

∴$f'(-2)\cdot f'(0)=g(-2)\cdot g(0)<0$,$f'(0)\cdot f'(2)=g(0)\cdot g(2)<0$,

∴在 $(-2,0)$ 上存在唯一的 x_0,在 $(0,2)$ 上存在唯一的 x'_0,使得 $f'(x_0)=f'(x'_0)=0$,

即 $f'(x)=x-e^x+2=0$ 有且只有两个不等实根 x_0,x'_0,

∴函数 $f(x)$ 的极值点的个数为 2. …………………………………………………… 4 分

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-ae^x+2x-1(a>0)$,$f'(x)=x-ae^x+2$,

∴$f(x)-f'(x)>a\ln x+\dfrac{1}{2}a-3$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,

即 $\dfrac{1}{2}x^2+x-a\ln x-\dfrac{1}{2}a>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立, ………………………… 5 分

令 $h(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-a\ln x-\dfrac{1}{2}a(x>1)$,

则 $h'(x)=x+1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2+x-a}{x}(x>1)$,

易知函数 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,∴$h'(x)>h'(1)=2-a$, ………………… 7 分

①当 $2-a\geqslant 0$,即 $a\leqslant 2$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

∴$h(x)>h(1)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}a>0$,∴$a<3$,∴$a\leqslant 2$,又 $a>0$,即 $0<a\leqslant 2$; ……………… 8 分

②当 $2-a<0$,即 $a>2$ 时,$\exists x_0\in(1,+\infty)$,使得 $h'(x_0)=0(x_0>1)$,∴$x_0^2+x_0-a=0$,

∴当 $x\in(1,x_0)$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减,

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增,

∴$h(x)\geqslant h(x_0)=\dfrac{1}{2}x_0^2+x_0-a\ln x_0-\dfrac{1}{2}a=\dfrac{1}{2}x_0-a\ln x_0>0$,∴$a<\dfrac{x_0}{2\ln x_0}$,

令 $\mu(x)=\dfrac{x}{2\ln x}(x>1)$，得 $\mu'(x)=\dfrac{\ln x-1}{2(\ln x)^2}(x>1)$，

∴当 $1<x<e$ 时，$\mu'(x)<0$，$\mu(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递减，

当 $x>e$ 时，$\mu'(x)>0$，$\mu(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，

∴$\mu(x)\geqslant\mu(e)=\dfrac{e}{2}$，∴$a<\dfrac{e}{2}$，与 $a>2$ 矛盾，不符合题意. ………… 11 分

综上，实数 a 的取值范围为 $(0,2]$. ………… 12 分

22. 解：(1)将曲线 C_1 的参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）消去参数 θ，

得曲线 C_1 的普通方程为 $x^2+y^2=3$. ………… 2 分

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{4}{\sin\theta+\cos\theta}$，即 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta-4=0$，

又 $\rho\sin\theta=y$，$\rho\cos\theta=x$，

得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+y-4=0$. ………… 5 分

(2)由(1)知，圆 C_1 的圆心为 $O(0,0)$，半径为 $\sqrt{3}$，

∴点 O 到直线 C_2 的距离为 $d=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}>\sqrt{3}$，

∴直线 C_2 与圆 C_1 相离. ………… 7 分

又点 P 是圆 C_1 上一点，

∴点 P 到直线 C_2 的距离的取值范围为 $[2\sqrt{2}-\sqrt{3},2\sqrt{2}+\sqrt{3}]$. ………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=|2x-1|-|x-1|=\begin{cases}-x, & x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 3x-2, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\\ x, & x>1\end{cases}$ ………… 2 分

当 $x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，由 $-x<1$ 解得 $x>-1$，∴$-1<x\leqslant\dfrac{1}{2}$；

当 $\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时，由 $3x-2<1$ 解得 $x<1$，∴$\dfrac{1}{2}<x<1$；

当 $x>1$ 时，$x<1$，无解，

综上所述，不等式 $f(x)<1$ 的解集为 $\{x|-1<x<1\}$. ………… 5 分

(2)由(1)知，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，

∴$f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}$，………… 6 分

∵正实数 a,b 满足 $a+b+2m=0$，

∴$a+b=1(a>0,b>0)$，………… 7 分

∴$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{2a+2b}{b}=3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}\geqslant 3+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{2a}{b}}=3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=\sqrt{2}-1$，$b=2-\sqrt{2}$ 时取等号，

∴$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$ 的取值范围为 $[3+2\sqrt{2},+\infty)$. ………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。