# 南宁市2023届高中毕业班第一次适应性测试
# 数学（理科）参考答案

一、选择题：本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.【答案】D

1.【解析】因为 $A=\{x|x>4\}$ , $B=\{x\in \mathbf{Z}|3<x<7\}=\{4,5,6\}$ ,所以 $A\cap B=\{5,6\}$ ,故选D.

2.【答案】A

【解析】由题意 $\bar{z}(1+i)=3-i$ ,可变形为 $\bar{z}=\dfrac{3-i}{1+i}=\dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-4i}{2}=1-2i$ ,

则复数 $z=1+2i$ ,故选A.

3.【答案】C

3.【解析】依题意C正确.

4.【答案】B

4.【解析】 $\because \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ ， $\therefore 1-\cos^2\alpha=\cos\alpha-1$ ，

$\cos^2\alpha+\cos\alpha-2=0$ ， $(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+2)=0$ ，

$\therefore \cos\alpha=1$ 或 $\cos\alpha=-2$ (舍)

$\therefore$ 又 $\because \sin\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)=-\cos\alpha=-1$ .

5.【答案】A

5.【解答】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{3}$ , $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ ,整理得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$ (常数),

故数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是以3为首项,1为公差的等差数列,所以 $\dfrac{1}{a_n}=3+(n-1)=n+2$ ,

所以 $S_5=5\cdot\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{n(n-1)}{2}d=5\times3+\dfrac{5\times4}{2}\times1=25$ ,故选A.

6.【答案】C

6.【解析】 $\because X\sim N(1,\sigma^2)$ , $\therefore P(0<X<1)=P(1<X<2)=0.28$

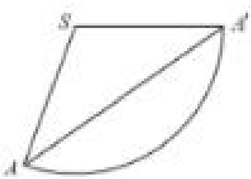
7.【答案】D

【解析】已知圆锥的侧面展开图为半径是3的扇形，如图，一只蚂蚁从A点出发绕着圆锥的侧面爬行一圈回到点A的最短距离为 $AA'$ ，设 $\angle ASA'=\alpha$ ，圆锥底面周长为 $2\pi$ ，所以

$\overset{\frown}{AA'}=\alpha\times3=2\pi$ 所以 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$ ，在 $\triangle SAA'$ 中，由 $SA=SA'=3$ ,得

$AA'=\sqrt{SA^2+SA'^2-2SA\cdot SA'\cdot\cos\alpha}$

$=\sqrt{3^2+3^2-2\times3\times3\times(-\dfrac{1}{2})}=3\sqrt{3}$




故选：D.

故 $P(x>0)=P(0<X<1)+P(X>1)=0.28+0.5=0.78$ ,故选C.

8.【答案】B

8.【解析】

$\sqrt{3}\sin\alpha-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\alpha-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)=\frac{4}{5}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}$

故选 B.

9.【答案】C

【解析】由 $f(x)=x^2$，得 $f'(x)=2x$，则 $f'(1)=2$，又 $f(1)=1$，所以函数 $f(x)=x^2$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$.

设 $y=2x-1$ 与函数 $g(x)=\frac{e^x}{a}$ 的图象相切于点 $(x_0,y_0)$，

由 $g'(x)=\frac{e^x}{a}$，可得 $\begin{cases} g'(x_0)=\frac{e^{x_0}}{a}=2, \\ g(x_0)=\frac{e^{x_0}}{a}=2x_0-1, \end{cases}$ 解得 $x_0=\frac{3}{2}$，$a=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}=\frac{e\sqrt{e}}{2}$，故选 C.

10【答案】D

10【解析】

$a_1=1,a_2=3,a_3=6,\cdots$

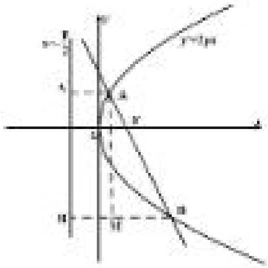
$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}(n^2+n)$

$\therefore\ f(n)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=\frac{1}{2}\left[(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$



11.【答案】A

11.【解析】

解法一：如图所示，由题意知直线过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F(\frac{p}{2},0)$，

准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，分别过 A,B 作准线的垂线，垂足为 $A'$，$B'$，

如图，设 $|AA'|=|AF|=t$，因为 $|FB|=3|FA|$，所以 $|BB'|=|BF|=3t$，

则 $|BM|=2t$，$|AB|=4t$，所以 $\angle ABM=60^\circ$；

即直线 $l$ 的倾斜角等于 $\angle AFx=120^\circ$，可得直线 $l$ 的斜率为 $-\sqrt{3}$，故选 A.

解法二：设直线的倾斜角为 $\theta$，由焦比定理 $\lambda=\frac{|FA|}{|BF|}=\frac{1}{3}$，$|\cos\theta|=\left|\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right|=\left|\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right|=\frac{1}{2}$，

依题意 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，$\theta=\frac{2\pi}{3}$，所求直线斜率为 $k=-\sqrt{3}$，故选 A.

12.【答案】B

12.【解析】$\because x\in[0,\pi]$，$\therefore \omega x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，令 $z=\omega x+\frac{\pi}{3}$，则 $z\in\left[\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，

由题意 $\sin z=\frac{1}{2}$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right]$ 上只能有两解 $z=\frac{5\pi}{6}$ 和 $z=\frac{13\pi}{6}$，$\therefore\frac{13\pi}{6}\le\omega\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{17\pi}{6}$，（*）

因为 $z\in\left[\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right]$ 上必有 $\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}=2$，

故在 $(0,\pi)$ 上存在 $x_1,x_2$ 满足 $f(x_1)-f(x_2)=2$，①成立；

$z=\frac{\pi}{2}$ 所对应的 $x$（显然在 $[0,\pi]$ 上）一定是最大值点，

因 $z=\frac{5\pi}{2}$ 对应的 $x$ 值有可能在 $[0,\pi]$ 上，故②结论错误；

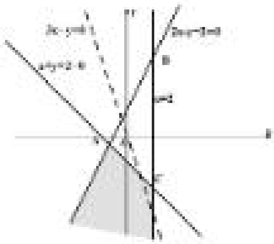
解（*）得 $\frac{11}{6}\le\omega<\frac{5}{2}$，所以③成立。当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$ 时，$z\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{3}\right)$，由于 $\frac{11}{6}\le\omega<\frac{5}{2}$，

故 $z\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{3}\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，此时 $y=\sin z$ 是增函数，从而 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$ 上单调递增，所以④成立，

综上，①③④成立，故选 B。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.【答案】2



13.【解析】由约束条件作出可行域如图所示，由目标函数 $z=3x+y$ 可知，当目标函数过点 $C(2,-4)$ 时，$z$ 取得最大值，最大值 $3\times2-4=2$。

14.【答案】$\sqrt{5}$

详解：取 $BC$ 的中点 $G$，连接 $AG,D_1G,AD_1$，如图所示：

$E,F$ 分别是棱 $AA_1$、$A_1D_1$ 的中点，所以 $EF//AD_1$，

又因为 $EF\subset$ 平面 $BEF$，$AD_1\not\subset$ 平面 $BEF$，所以 $AD_1//$ 平面 $BEF$。

因为 $FD_1//BG$，$FD_1=BG$，

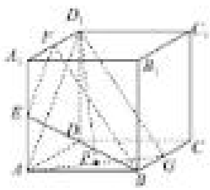
所以四边形 $FBGD_1$ 为平行四边形，所以 $FB//GD_1$。

又因为 $FB\subset$ 平面 $BEF$，$GD_1\not\subset$ 平面 $BEF$，所以 $GD_1//$ 平面 $BEF$。

因为 $GD_1\cap AD_1=D_1$，所以平面 $AD_1G//$ 平面 $BEF$。

因为点 $P$ 为底面四边形 $ABCD$ 内（包括边界）的一动点，直线 $D_1P$ 与平面 $BEF$ 无公共点，

所以 $P$ 的轨迹为线段 $AG$，则 $|AG|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$。




15.【答案】$\sqrt{3}$

【解析】由正弦定理得 $\frac{|PF_1|}{\sin\angle PF_2F_1}=\frac{|PF_2|}{\sin\angle PF_1F_2}$，所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{\sin\angle PF_2F_1}{\sin\angle PF_1F_2}=2$

即 $|PF_1|=2|PF_2|$，由双曲线的定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=|PF_2|=2a$，

所以 $|PF_2|=2a$，$|PF_1|=4a$，

因为 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，由余弦定理可得 $4c^2=16a^2+4a^2-2\times4a\cdot2a\cdot\cos60^\circ$，

整理可得 $4c^2=12a^2$，所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=3$，即 $e=\sqrt{3}$。

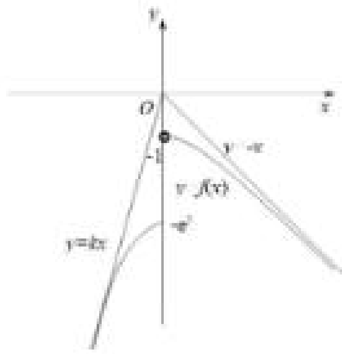
16.【答案】$\left(0,1+\frac{2}{e}\right)$

【解析】当 $x\le 0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{e^{x+e}}-e^2$，则 $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^{x+e}}>0$，

所以，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上为增函数；

当 $x>0$ 时，由 $y=-\sqrt{1+x^2}<0$ 可得 $y^2=1+x^2$，即 $y^2-x^2=1$，

作出函数 $f(x)$ 的图象如下图所示：




设过原点且与函数 $f(x)(x\le 0)$ 的图象相切的直线的方程为 $y=kx$，设切点为 $\left(x_0,\dfrac{x_0}{e^{x_0+e}}-e^2\right)$，

所以，切线方程为 $y-\dfrac{x_0}{e^{x_0+e}}+e^2=\dfrac{1-x_0}{e^{x_0+e}}(x-x_0)$，

将原点坐标代入切线方程可得 $-\dfrac{x_0}{e^{x_0+e}}+e^2=-(1-x_0)\dfrac{x_0}{e^{x_0+e}}$，即 $\dfrac{x_0^2}{e^{x_0+e}}=e^2$，

构造函数 $g(x)=\dfrac{x^2}{e^{x+e}}$，其中 $x\le 0$，则 $g'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^{x+e}}\le 0$，

所以，函数 $g(x)=\dfrac{x^2}{e^{x+e}}$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，且 $g(-e)=e^2$，

由 $g(x_0)=\dfrac{x_0^2}{e^{x_0+e}}=e^2$，解得 $x_0=-e$，所以，$k=\dfrac{1-x_0}{e^{x_0+e}}=e+1$，

而函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}\,(x<0)$ 的渐近线方程为 $y=-x$，

设直线 $y=-x$ 与 $y=(e+1)x$ 的夹角为 $\theta$，设直线 $y=(e+1)x$ 的倾斜角为 $\alpha$，

则 $\tan\theta=\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\tan\dfrac{3\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\dfrac{3\pi}{4}\tan\alpha}=\dfrac{-1-(e+1)}{1-(e+1)}=1+\dfrac{2}{e}$，

结合图形可知，$0<\tan\angle MON<1+\dfrac{2}{e}$，故答案为：$\left(0,1+\dfrac{2}{e}\right)$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生依据要求作答。

17.【答案】（1）$B=\dfrac{\pi}{3}$ （2）$(5,6]$

【解析】（1）由 $(b-c)(\sin B+\sin C)=(\sin A-\sin C)a$

根据正弦定理可得 $(b-c)(b+c)=(a-c)a$，……………………………… 1 分

所以，$a^2+c^2-b^2=ac$，……………………………… 2 分

由余弦定理可得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$, ……………………………………………… 3 分

$\because B\in(0,\pi)$, ……………………………………………………………………………… 4 分

因此 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, $\therefore 3=a^2+c^2-ac$, ………………………………… 6 分

即 $a^2+c^2=3+ac$

由正弦定理,得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$, …………………………………… 7 分

即 $a=2\sin A, c=2\sin C$ ,又 $C=\dfrac{2\pi}{3}-A$ ,所以

$ac=4\sin A\sin C=4\sin A\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=2\sqrt{3}\sin A\cos A+2\sin^2 A$

$=\sqrt{3}\sin 2A-\cos 2A+1=2\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$. ……………………………………… 9 分

由 $\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ ,解得 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$, ………………………………………… 10 分

所以 $\dfrac{\pi}{6}<2A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$ ,所以 $\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$, …………………………… 11 分

所以 $ac\in(2,3]$ ,所以 $a^2+c^2=3+ac\in(5,6]$. …………………………………………… 12 分

18. (I)证明：∵MN 分别是 AD、AC 的中点

$\therefore MN//DC$ ，又 $\because DC//EB$

$\therefore MN//EB$ ，$\therefore E$、$M$、$N$、$B$ 四点共面. ………………………………………… 3 分

在图 1 中，由 $AB=6, AE=2EB$ 得 $AE=4, BE=2$，

$\because AB//DC, \angle ABC=90^\circ, BC=DC=2$，

$\therefore$ 四边形 $DEBC$ 是正方形，$\therefore DE\perp AB$ .

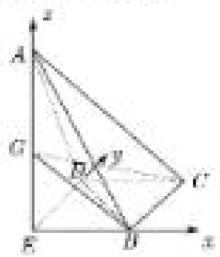
在图 2 中，平面 $AED\perp$ 平面 $DEBC$ ，平面 $AED\cap$ 平面 $DEBC=ED$ ，$AE\perp ED$ .

$\therefore AE\perp$ 平面 $DEBC$ ，$\therefore AE\perp DC$

又 $\because DC\perp DE, DE\cap AE=E$ ，

$\therefore DC\perp$ 平面 $AED$ ，$\therefore$ 平面 $ADC\perp$ 平面 $AED$ . ……………………………… 6 分

(II)由图易知直线 EA、EB、ED 两两垂直,以 E 为原点，分别以 EB、ED、EA 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系 $E-xyz$ 。则 $B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,2,0)$,




理数答案第 5 页 共 10 页

设 $G(0,0,t),(0\le t\le 4)$ 得 $\overrightarrow{CG}=(-2,-2,t),\overrightarrow{BD}=(-2,2,0),\overrightarrow{BG}=(-2,0,t)$ ………………… 8 分

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面BDG的一个法向量

由 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{BD}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{BG}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BG}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}-2x+2y=0\\ -2x+tz=0\end{cases}\Rightarrow x=y=\dfrac{t}{2}z$.

取 $z=1$ 得 $\vec{n}=\left(\dfrac{t}{2},\dfrac{t}{2},1\right)$ ………………… 9 分

设直线 CG 与平面 BDG 所成角为 $\theta$,则

$$\sin\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CG}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{CG}|}=\frac{|-t-t+t|}{\sqrt{8+t^2}\times\sqrt{\dfrac{t^2}{2}+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{8+t^2}\cdot\sqrt{t^2+2}}=\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{t^2+\dfrac{16}{t^2}+10}}\le\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{t^2\times\dfrac{16}{t^2}}+10}}=\frac{1}{3}$$

当且仅当 $t^2=\dfrac{16}{t^2}$,即当 $t=2$ 取等号.

所以当 $t=2$,即 G 为 AE 中点时,直线 CG 与平面 BDG 所成角的正弦值 $\sin\theta$

取得最大值为 $\dfrac{1}{3}$. ………………… 12 分

19【答案】(1) $\dfrac{3}{5}$ (2) $E(X)=2,\ D(X)=\dfrac{2}{5}$. (3) $E(Y)=2,\ D(Y)=\dfrac{2}{3}$,

甲自媒体平台公司竞标成功的可能性更大

【解析】

(1) 记"该甲自媒体平台公司第一次答错"为事件 $A$,"该甲自媒体平台公司第二次和第三次均答对"为事件 $B$,则 $P(A)=\dfrac{1}{3}$,$P(AB)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{5}$, ………………… 2 分

∴甲自媒体平台公司在第一次答错的的条件下,第二次和第三次均答对的概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}$$ ………………… 4 分

(2)设甲自媒体平台公司答对的问题数为 $X$,则 $X$ 的所有可能取值为1,2,3.

$$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5},P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5},P(X=3)=\frac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\frac{1}{5},$$

∴ $X$ 的分布列为

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

………………… 5 分

$E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$,

$D(X)=(1-2)^2\times\frac{1}{5}+(2-2)^2\times\frac{3}{5}+(3-2)^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ ………………………… 7 分

(3)设乙自媒体平台公司答对的问题数为 $Y$，则 $Y$ 的所有可能取值为 0,1,2,3．

$P(Y=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，

$P(Y=1)=C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$，

$P(Y=2)=C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$，

$P(Y=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

∴ $Y$ 的分布列为：

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{8}{27}$ |

………………………………………………………… 8 分

$E(Y)=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{8}{27}=2$， ………………………… 9 分

另解：∵ $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，∴ $E(Y)=3\times\frac{2}{3}=2$

$D(Y)=(0-2)^2\times\frac{1}{27}+(1-2)^2\times\frac{2}{9}+(2-2)^2\times\frac{4}{9}+(3-2)^2\times\frac{8}{27}=\frac{2}{3}$ ………………… 10 分

（另解：$D(Y)=3\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$）

由 $E(X)=E(Y)$，$D(X)<D(Y)$ 可得，甲自媒体平台公司竞标成功的可能性更大。 ………………………… 12 分

20【答案】（1）（2）见解析（3）见解析

【解析】

（1）$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$．$f'(x)=1-\frac{a}{x+1}=\frac{x+1-a}{x+1}$ ………………………… 2 分

①若 $a\leqslant 0$，当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增。 ……… 3 分

②若 $a>0$，当 $x\in(-1,a-1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,a-1)$ 上单调递减，在 $(a-1,+\infty)$ 上单调递增． ………………… 5 分

（2）当 $a=1$ 时，由（1）知 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，………… 6 分

$f(x)\geq f(0)=0-\ln 1=0$； 7 分

（3）由（2）知当 $a=1$ 且 $x\in(0,+\infty)$ 时，$x-\ln(1+x)>0$，………………………… 8 分

令 $x=\frac{1}{n}$ 得 $\frac{1}{n}>\ln(1+\frac{1}{n})$，…………9分

从而

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{4n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{4n}\right)$$

…………10分

$$=\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}+\ln\frac{n+3}{n+2}+\cdots+\ln\frac{4n+1}{4n}=\ln\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n+3}{n+2}\times\cdots\times\frac{4n+1}{4n}$$

…………11分

$>\ln\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n+3}{n+2}\times\cdots\times\frac{4n}{4n-1}=\ln\frac{4n}{n}=2\ln 2$. …………12分

21.【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) 直线 $BC$ 存在,且直线 $BC$ 的方程为 $-2x+\frac{8\sqrt{7}-14}{3}y+\frac{40\sqrt{7}-70}{9}=0$.

【解析】

解：(1) 由题意可知椭圆的右焦点为 $F_2(\sqrt{3},0)$，因为点 $P(\sqrt{3},\frac{1}{2})$ 在椭圆 $C$ 上，所以

$|PF_1|+|PF_2|=2a$

$2a=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{2}=4$，$a=2$；…………2分

$c=\sqrt{3}$，所以 $b=1$. …………3分

椭圆 $E$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………4分

(2) 由 (1) 可知椭圆的上顶点为 $A(0,1)$

假设这样的 $B,C$ 存在，且设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，则直线 $AB$ 的斜率为 $k=\frac{y_1-1}{x_1}$

直线 $AB$ 的方程为 $(y_1-1)x-x_1y+x_1=0$. …………5分

因为直线 $AB$ 与圆 $M$ 相切，则 $d=r$，所以 $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{x_1^2+(y_1-1)^2}}=r$，…………6分

两边平方化简得 $(x_1+y_1-1)^2=r^2\left[x_1^2+(y_1-1)^2\right]$，

整理得 $(1-r^2)x_1^2+(1-r^2)(y_1-1)^2+2x_1(y_1-1)=0$.

因为 $x_1^2=4(1-y_1^2)$，消去 $x_1^2$ 得 $(1-r^2)\cdot 4(1-y_1^2)+(1-r^2)(y_1-1)^2+2x_1(y_1-1)=0$.

因为 $y_1\neq 1$，两边同时除以 $1-y_1$，得 $\left(1-r^2\right)\cdot 4\left(1+y_1\right)+\left(1-r^2\right)\left(1-y_1\right)-2x_1=0$，

整理得 $-2x_1+3\left(1-r^2\right)y_1+5\left(1-r^2\right)=0$，…………7 分

即点 $B$ 在直线 $-2x+3\left(1-r^2\right)y+5\left(1-r^2\right)=0$ 上，

同理，点 $C$ 也在直线 $-2x+3\left(1-r^2\right)y+5\left(1-r^2\right)=0$ 上，…………8 分

因此直线 $BC$ 的方程为 $-2x+3\left(1-r^2\right)y+5\left(1-r^2\right)=0$，…………9 分

若直线 $BC$ 与圆 $M$ 相切，则 $\dfrac{\left|3-5r^2\right|}{\sqrt{9\left(1-r^2\right)^2+4}}=r$，…………10 分

解得 $r=\dfrac{\sqrt{13}+2}{3}$（舍去）或 $r=\dfrac{\sqrt{13}-2}{3}$。…………11 分

因此直线 $BC$ 存在，且直线 $BC$ 的方程为 $-2x+\dfrac{4\sqrt{13}-8}{3}y+\dfrac{20\sqrt{13}-40}{9}=0$。…………12 分

22. 【答案】（1）$\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=-2+2\sin\alpha\end{cases}$ $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 为参数 （2） $D(2,\dfrac{7\pi}{6})$

【详解】（1） $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,x^2+y^2=\rho^2$，…………1 分

由 $\rho+4\sin\theta=0$，$\theta\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$，得 $x^2+y^2+4y=0,x\in[-2,0]$，…………3 分

所以 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=-2+2\sin\alpha\end{cases}$ $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 为参数…………5 分

（2）由（1）所得 C 的参数方程，可设点 $D(2\cos\alpha,-2+2\sin\alpha)$…………6 分

$\dfrac{-2+2\sin\alpha+2}{2\cos\alpha-0}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\because\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]\therefore\alpha=\dfrac{5\pi}{6},D\left(-\sqrt{3},-1\right)$

…………8 分

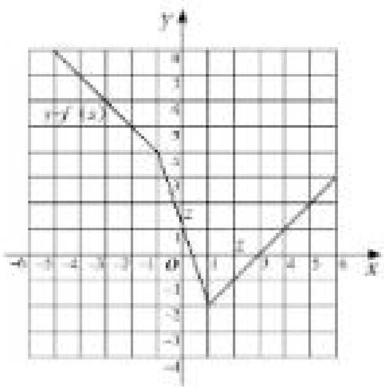
$\rho=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=2$，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\theta=\dfrac{7\pi}{6}$…………9 分

点 D 的极坐标为 $D(2,\dfrac{7\pi}{6})$…………10 分

23.【答案】(1)见解析(2)$[2,+\infty)$.

【解析】(1) 由题得，$f(x)=2|x-1|-|x+1|=\begin{cases}-x+3, x<-1,\\ -3x+1, -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x-3, x>1,\end{cases}$ ……3分

画出 $f(x)$ 的图象如图所示：



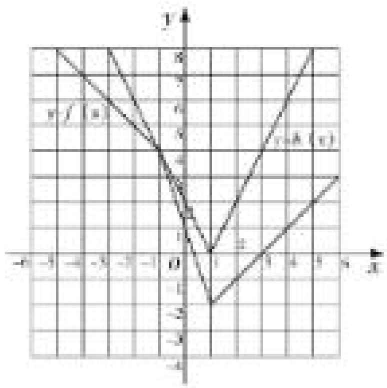

…… 5分

(2) 令 $h(x)=a\cdot g(x)=a|x-1|=\begin{cases}-ax+a, x\leqslant 1,\\ ax-a, x>1,\end{cases}$

当 $x=-1$ 时，$f(-1)=4$，$g(-1)=2$，

要使 $h(-1)\geqslant f(-1)>0$，即 $a\cdot g(-1)\geq f(-1)>0$，则需 $a>0$ …… 7分

画出 $h(x)$ 的图象，




由图象知，若 $f(x)\leqslant ag(x)$ 恒成立，

则 $h(-1)=2a\geqslant 4$，

所以 $a\geqslant 2$，

所以实数 $a$ 的取值范围为 $[2,+\infty)$. …… 10分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。