# 高三年级2022～2023学年5月份模拟考·数学

## 参考答案、提示及评分细则

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．B　因为$M\cap N=M$，所以$M\subseteq N$，所以$a\leqslant -1$．故选B．

2．A　由题意设$z=a+bi(a>0,b>0)$，由$|z+\bar{z}|=|2a|=2$，得$a=1$，因为复数$z$的模长为2，所以$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+b^2}=2$，解得$b=\sqrt{3}$，所以$z=1+\sqrt{3}i$，所以$\bar{z}=1-\sqrt{3}i$．故选A．

3．C　因为$AB$中点为$P$，又$|AB|=6$，所以$|CP|=\sqrt{25-\left(\frac{6}{2}\right)^2}=4$，点$P$在以$C$为圆心，4为半径的圆上，其轨迹方程为$(x-2)^2+(y-4)^2=16$．故选C．

4．D　由题设$l=h\tan\theta$，“晷影长”分别是“表高”的$\frac{1}{3}$倍和$\frac{1}{2}$倍时，$\tan\theta_1=\frac{1}{3}$，$\tan\theta_2=\frac{1}{2}$，

所以$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=1$，故选D．

5．C　设圆台的上底面的圆心为$O_1$，下底面的圆心为$O$，点$A$为上底面圆周上任意一点，

圆台的高为$h$，球的半径为$R$，则$h=OO_1=\sqrt{R^2-O_1A^2}=\sqrt{4-1^2}=\sqrt{3}$，

$V=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h=\frac{1}{3}(4\pi+\sqrt{4\pi\cdot\pi}+\pi)\times\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$．故选C．

6．D　记第一次抽到红、绿、黄球的事件分别为$A_1$，$A_2$，$A_3$，则$P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4}$，记第二次在红、绿、黄色口袋内抽到黄球的事件分别为$B_1$，$B_2$，$B_3$，而$A_1$，$A_2$，$A_3$两两互斥，其和为$\Omega$，所以$P(B_1|A_1)=\frac{1}{4}$，$P(B_2|A_2)=\frac{1}{4}$，$P(B_3|A_3)=\frac{1}{6}$，记第二次抽到黄球的事件为$B$，所以$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_iB_i)=\sum_{i=1}^{3}[P(A_i)\cdot P(B_i|A_i)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{48}$．故选D．

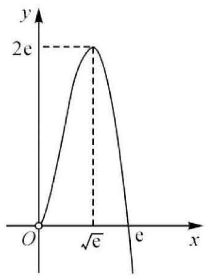
7．B　因为双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，得$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以双曲线$\Gamma$的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，设直线$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$的倾斜角为$\theta$，则$\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

由对称性不妨令点$A$，$B$分别在第一、四象限，坐标原点为$O$，则$\angle AOB=2\theta$，

于是得$\sin\angle AOB=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，而双曲线的虚半轴长为$b$，即$|OA|=|OB|=b$，显然四边形$ABCD$为矩形，其面积$S=4S_{\triangle AOB}=4\times\frac{1}{2}OA^2\sin\angle AOB=\frac{4\sqrt{2}}{3}b^2=12\sqrt{2}$，得$b^2=9$，所以$a^2=2b^2=18$，所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{9}=1$．故选B．

8．C　设直线与$g(x)=x^2$的切点为$(x_1,x_1^2)$，由$g'(x)=2x$可知该直线的斜率为$2x_1$，即该直线的方程为$y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$，即$y=2x_1x-x_1^2$，设直线与$f(x)=a\ln x$的切点为$(x_2,a\ln x_2)$，由$f'(x)=\frac{a}{x}$可知该

直线的斜率为$\frac{a}{x_2}$，即该直线的方程为 $y-a\ln x_2=\frac{a}{x_2}(x-x_2)$，即 $y=\frac{a}{x_2}x+a(\ln x_2-1)$，因为函数 $f(x)=a\ln x(a>0)$和 $g(x)=x^2$ 有且只有一条公切线，所以$\begin{cases}2x_1=\frac{a}{x_2},\\ a(\ln x_2-1)=-x_1^2,\end{cases}$ 即 $a=4x^2-4x^2\ln x$ 有唯一实根，令 $h(x)=4x^2-4x^2\ln x\,(x>0)$，则 $h'(x)=8x-8x\ln x-4x=4x(1-2\ln x)$，当 $4x(1-2\ln x)>0$ 时，$0<x<\sqrt{e}$，当 $4x(1-2\ln x)<0$ 时，$x>\sqrt{e}$，即 $h(x)$在$(0,\sqrt{e})$上单调递增，在$(\sqrt{e},+\infty)$上单调递减，则 $h(x)$在 $x=\sqrt{e}$ 处取得最大值，$h(\sqrt{e})=4e-4e\times\frac{1}{2}=2e$，当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to 0$，$h(e)=0$，函数 $h(x)$图象如图所示，因为 $a=4x^2-4x^2\ln x$ 有唯一实根，所以只有 $a=2e$，故选 C.




**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9. BD　∵ $\frac{T}{2}=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，∴ $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，∴ $\omega=2$，$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)=1$，由于 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{6}<\varphi+\frac{2\pi}{3}<\frac{7\pi}{6}$，所以 $\varphi+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 A 选项错误，B 选项正确；

$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi$，$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，得 $x=\frac{\pi}{12}$，所以 $f(x)$关于$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$对称，C 选项错误；

$-\frac{\pi}{2}+2k_1\pi<2x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$，$-\frac{\pi}{6}+k_1\pi<x<\frac{\pi}{3}+k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$，当 $k_1=1$ 时，得 $f(x)$在$\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$上递增，则 $f(x)$在区间$\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$上单调递增，所以 D 选项正确. 故选 BD.

10. BD　连接 $AC$ 交 $BD$ 于 $O$ 点，连接 $OF$，$OE$，$ED$.

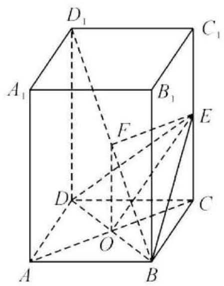
因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $AC\cap BD=O$，所以 $O$ 为 $BD$ 的中点，

因为 $F$ 为 $BD_1$ 的中点，所以 $OF\parallel DD_1$，且 $OF=\frac{1}{2}DD_1$，

在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$CC_1\parallel DD_1$，且 $CC_1=DD_1$，

∵ $E$ 为 $CC_1$ 的中点，则 $CE\parallel DD_1$，且 $CE=\frac{1}{2}DD_1$，∴ $OF\parallel CE$，且 $OF=CE$，

所以四边形 $OCEF$ 为平行四边形，所以 $EF\parallel OC$，所以$\angle BCO$ 为异面直线 $EF$ 与 $BC$ 所成的角或其补角，由已知底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且$\angle BAD=60^\circ$，可知$\angle BCO=30^\circ$，故选项 A 错误；




由已知 $OC\perp DB$，所以 $OC\perp$平面 $DBD_1$，所以三棱锥 $D_1-BDE$ 的体积 $V_{D_1-BDE}=V_{E-BDD_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle BDD_1}OC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times4\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故选项 B 正确；

由已知在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $EC\perp$平面 $ABCD$，又 $OC\perp BD$，所以 $OE\perp BD$，所以$\angle EOC$ 为二面角 $E-BD-C$ 的平面角，$\tan\angle EOC=\frac{EC}{OC}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故选项 C 错误；

由已知 $CB=CD=BD=CE=2$，$EC\perp$平面 $BCD$，设三棱锥 $E-BCD$ 的外接球球心为 $O_1$，外接球半径为 $R$，正三角形 $BCD$ 的外心为点 $O_2$，则 $O_1O_2\perp$平面 $BCD$，因为 $O_1C=O_1E$，所以 $O_1O_2=\frac{1}{2}CE=1$，所以 $R^2=$

$O_2C^2+O_1O_2^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+1^2=\frac{7}{3}$，所以三棱锥 $E-BCD$ 的外接球表面积 $S=4\pi R^2=\frac{28\pi}{3}$，故选项 D 正确. 故选 BD.

11. ABD　$x_{n+1}=\frac{1}{x_n}+\ln x_n$，令 $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，

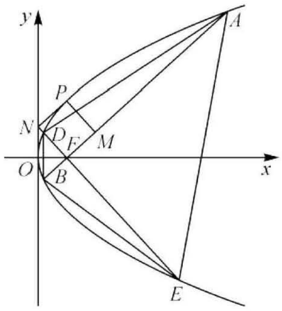
当 $x\geqslant1$ 时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 递增；当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，且 $f(1)=1+\ln 1=1$，∴ $f(x)\geqslant1$，

∵ $x_1\in(0,1)$，∴ $x_2=f(x_1)>1$，$x_3=f(x_2)>1$，…，$x_{n+1}=f(x_n)>1$，∴ $x_1$ 是最小的项，所以 A，B 正确；

令 $g(x)=f(x)-x=\frac{1}{x}+\ln x-x$，$x\geqslant1$，$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{-x^2+x-1}{x^2}<0$，∴ $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内递减，∴ $g(x)<g(1)=0$，所以 $x_3-x_2<0$，即 $x_3<x_2$；$x_4-x_3<0$ 即 $x_4<x_3$ … $x_{n+1}-x_n<0$，即 $x_{n+1}<x_n(n\geqslant2)$，所以 C 错误；

因为 $x_{n+1}<x_n(n\geqslant2)$，所以 $g(x_{n+1})>g(x_n)$，则 $\frac{1}{x_{n+1}}+\ln x_{n+1}-x_{n+1}>\frac{1}{x_n}+\ln x_n-x_n$，所以 $x_{n+2}-x_{n+1}>x_{n+1}-x_n$，即 $2x_{n+1}<x_n+x_{n+2}$，所以 D 正确. 故选 ABD.

12. ACD　A 选项，由题意得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，设直线 $l_1$：$x=\frac{p}{2}+my$，与 $y^2=2px$ 联立得 $y^2-2pmy-p^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，故 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$，则 $x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{p^2}{4}-p^2=-3$，解得 $p=2$，A 正确；




B 选项，由 A 选项可知 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，因为 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，所以 $y_1=-3y_2$，代入 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$ 得 $y_2=-2m$，$-3y_2^2=-4$，即 $m^2=\frac{1}{3}$，因为点 A 在第一象限，所以 $m>0$，解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线 $l_1$ 的斜率为 $\frac{1}{m}=\sqrt{3}$，设直线 $l_1$ 的倾斜角为 $\theta(0\leqslant\theta<\pi)$，则 $\tan\theta=\sqrt{3}$，解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$，B 错误；

C 选项：抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F$ 的坐标为 $(1,0)$，$P(1,2)$.

因为 $|PM|^2+|PN|^2=|PF|^2=4$，$|PM|^2+|PN|^2\geqslant2|PM|\cdot|PN|$，

所以 $|PM|\cdot|PN|\leqslant2$，由 $|PM|^2+|PN|^2=(|PM|+|PN|)^2-2|PM|\cdot|PN|$，

得 $(|PM|+|PN|)^2\leqslant8$，即 $|PM|+|PN|\leqslant2\sqrt{2}$，当且仅当 $|PM|=|PN|=\sqrt{2}$ 时，等号成立.

所以四边形 $PMFN$ 周长的最大值为 $4\sqrt{2}$，故 C 正确；

D 选项：由 A 选项，得 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，则 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4(1+m^2)$，同理得 $|DE|=4\left(1+\frac{1}{m^2}\right)$.

$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|DE|}=\frac{1}{4(m^2+1)}+\frac{m^2}{4(m^2+1)}=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|DE|}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{|AB|}\cdot\frac{1}{|DE|}}$，所以 $|AB|\cdot|DE|\geqslant64$，当且仅当 $|AB|=|DE|=8$ 时，等号成立.

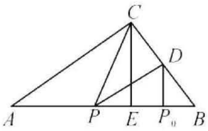
此时 $S_{四边形ADBE}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|FE|+\frac{1}{2}|AB|\cdot|FD|=\frac{1}{2}|AB|\cdot|DE|\geqslant32$，故 D 正确. 故选 ACD.

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 1　由题设，$f(x)$ 是周期为 2 的函数，所以 $f(13)+f(-14)=f(13)+f(14)=f(1)+f(0)=1$.

14. $\frac{13}{125}$　因考生成绩符合正态分布 $N(75,\sigma^2)$，所以 $P(X>90)=\frac{1-P(60\leqslant X\leqslant90)}{2}=\frac{1}{5}$，故任意选取 3 名

考生，至少有 2 名考生的成绩高于 90 的概率为 $P=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{13}{125}$.




15. 1 取 $BC$ 中点 $D$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{PD}^2+\overrightarrow{PD}\cdot(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB})+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{PD}^2-\overrightarrow{DB}^2$.

同理 $\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}=\overrightarrow{P_0D}^2-\overrightarrow{DB}^2$. 又 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，故 $\overrightarrow{PD}^2\geqslant\overrightarrow{P_0D}^2$，即 $|\overrightarrow{PD}|\geqslant|\overrightarrow{P_0D}|$ 恒成立.

所以 $DP_0\perp AB$. 作 $CE\perp AB$，则 $P_0$ 为 $EB$ 中点，故 $EB=2P_0B=4$，所以 $AE=4$.

所以 $E$ 为 $AB$ 中点，所以 $AC=BC$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

所以 $\sin\angle ABC=\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}=1$.

16. $\frac{1}{e}$ 由 $f(x_1)=g(x_2)=t(t>2)$，$x_2>x_1>0$ 得 $e^{x_1}-x_1=x_2-\ln x_2=e^{\ln x_2}-\ln x_2=t(t>2)$，即 $f(x_1)=f(\ln x_2)=t(t>2)$. $\because f'(x)=e^x-1$. $\therefore$ 当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$. $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(1)=e-1<2$，$\therefore x_1>1$，则 $x_2>x_1>1$，$\therefore \ln x_2>0$，$\therefore x_1=\ln x_2$，即 $e^{x_1}=x_2$，$\therefore \frac{\ln t}{x_2-x_1}=\frac{\ln t}{e^{x_1}-x_1}=\frac{\ln t}{f(x_1)}=\frac{\ln t}{t}$.

令 $\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}(t>2)$，则 $\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，当 $t\in(2,e)$ 时，$\varphi'(t)>0$；当 $t\in(e,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)<0$.

$\therefore \varphi(t)$ 在 $(2,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore \varphi(t)_{\max}=\varphi(e)=\frac{1}{e}$，即 $\frac{\ln t}{x_2-x_1}$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.**

17. 解：(1) 由 $a\sin B=\sqrt{3}b(1-\cos A)$ 及正弦定理得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B(1-\cos A)$. …………………… 1 分

因为 $\sin B\neq0$，所以 $\sin A=\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos A$，即 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………………… 3 分

由 $0<A<\pi$，$\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，得 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$； …………………………………………… 5 分

(2) 由题意得 $BD=\frac{1}{3}a$，$DC=\frac{2}{3}a$，$AD=1$，

在 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ACD$ 中，分别由余弦定理得 $\cos\angle ADB=\frac{DA^2+DB^2-AB^2}{2DA\cdot DB}=\frac{1+\frac{1}{9}a^2-c^2}{\frac{2}{3}a}$，$\cos\angle ADC=\frac{DA^2+DC^2-AC^2}{2DA\cdot DC}=\frac{1+\frac{4}{9}a^2-b^2}{\frac{4}{3}a}$， …………………………………………… 7 分

又 $\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$，化简得 $b^2+2c^2-3=\frac{2}{3}a^2=\frac{2}{3}(b^2+c^2-bc)$， ………………………… 8 分

整理得 $9=b^2+4c^2+2bc\geqslant4bc+2bc=6bc$，即 $bc\leqslant\frac{3}{2}$，当且仅当 $b=2c$ 时等号成立.

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $S_{\max}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. …………………………………………… 10 分

另解：因为 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，所以 $9\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AC}^2+4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AB}^2$， …………… 7 分

又 $AD=1$，$A=\frac{\pi}{3}$，所以 $9=b^2+4c^2+4bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+4c^2+2bc\geqslant4bc+2bc=6bc$， ……………………… 9 分

所以 $bc\leqslant\frac{3}{2}$，当且仅当 $b=2c$ 时等号成立.

所以△$ABC$ 面积的最大值为 $S_{\max}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. …………………………………… 10 分

18. 解：(1)因为 $BC=2CD=2PC$，又 $PB=\sqrt{5}CD$，所以 $PB^2=5CD^2=BC^2+CP^2$， ………………………… 2 分

$AC$，$BC\subset$平面 $ABC$，所以 $PC\perp BC$，由 $AC\perp CD$，可知 $AC\perp PC$，$AC\cap BC=C$，所以 $PC\perp$平面 $ABC$， ……

…………………………………………………………………………………………… 4 分

因为 $AB\subset$平面 $ABC$，所以 $PC\perp AB$，又 $AB\perp BC$，$PC\cap BC=C$，$PC$，$BC\subset$平面 $PBC$，

所以 $AB\perp$平面 $PBC$，且 $AC$ 的中点 $O$，连 $OM$，$OB$； ………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知，取 $AC$ 的中点 $O$，连 $OM$，$OB$，$PC\perp$平面 $ABC$，$OM$ 为△$PAC$ 的中位线，

所以 $OM\perp AC$，$OM\perp OB$，即 $OM$，$OB$，$AC$ 两两垂直，如图以 $O$ 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

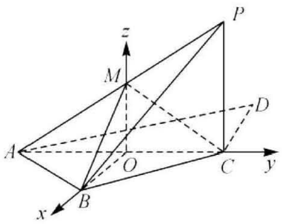
设 $CD=2$，则 $P(0,2\sqrt{2},2)$，$B(2\sqrt{2},0,0)$，$C(0,2\sqrt{2},0)$，$M(0,0,1)$， ………………………………… 7 分

所以 $\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BM}=(-2\sqrt{2},0,1)$，

设平面 $MBC$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0,\\ -2\sqrt{2}x+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,2\sqrt{2})$， ……

………………………………………………………………………… 10 分




所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{2}{5}$.

所以直线 $PB$ 与平面 $MBC$ 所成角的正弦值为 $\frac{2}{5}$. ……………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，由已知得 $q>0$，

因为 $a_2a_3a_4=64$，所以 $a_3^3=64$，得 $a_3=4$，又 $a_1=1$，所以 $q=2$，

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$， ………………………………………………………………………… 2 分

对于数列 $\{b_n\}$，因为 $b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1$ ①，

当 $n=1$ 时，$b_1=b_2-1$，则 $b_2=2$，

当 $n\geqslant2$ 时，$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n-1}b_{n-1}=b_n-1$ ②，

由①－②得 $\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$，即 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}$. ……………………………………………………… 4 分

又 $\frac{b_2}{b_1}=2$，也适合上式，故 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n\geqslant2$ 时，$b_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot b_1=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}\cdot1=n$，又 $b_1=1$，

所以 $b_n=n$； ……………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可得：$a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$，则 $c_n=a_n+(-1)^n(2b_n+1)=2^{n-1}+(-1)^n(2n+1)$，

则数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $T_{2n}=2^0+(-1)\cdot(2+1)+2^1+(-1)^2\cdot(2\times2+1)+\cdots+2^{2n-1}+(-1)^{2n}\cdot(2\cdot2n+1)$， ……………………………………………………………………………………… 8 分

$T_{2n}=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{2n-1})+[(-1)\cdot(2+1)+(-1)^2\cdot(2\times2+1)+\cdots+(-1)^{2n}\cdot(2\cdot2n+1)]$

$=\frac{1-2^{2n}}{1-2}+[-(2+1)+(2\times2+1)]+\cdots+[-(2\cdot(2n-1)+1)+(2\cdot2n+1)]$

$=2^{2^n}-1+2n=2^{2^n}+2n-1$. ………………………………………………………………… 12分

20. 解：(1)假设张华与刘中答对的题目个数分别为 $x_1$ 和 $x_2$，……………………………………………… 1分

故所求概率 $P=P(x_1=2,x_2=3)+P(x_1=3,x_2=2)+P(x_1=3,x_2=3)$

$=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3\times C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{7}{16}$.

所以张华与刘中同学这一组在一轮竞赛中获得一个积分的概率为 $\frac{7}{16}$；……………………………… 4分

(2)由(1)得 $P=P(x_1=2,x_2=3)+P(x_1=3,x_2=2)+P(x_1=3,x_2=3)$

$=C_3^2\times p_1^2\times(1-p_1)\times(p_2)^3+(p_1)^3\times C_3^2\times p_2^2\times(1-p_2)+p_1^3\times p_2^3$,

整理得 $P=p_1^2p_2^2[3(p_1+p_2)-5p_1p_2]=p_1^2p_2^2(4-5p_1p_2)$，……………………………………… 6分

因为 $0<p_1<1$，$0<p_2<1$ 且 $p_1+p_2=\frac{4}{3}$，所以 $\frac{1}{3}<p_1<1$，$\frac{1}{3}<p_2<1$，

所以 $\frac{1}{9}<p_1p_2\leqslant\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^2$，当且仅当 $p_1=p_2=\frac{2}{3}$ 时等号成立，即 $\frac{1}{3}<p_1p_2\leqslant\frac{4}{9}$，………………… 7分

令 $p_1p_2=t$，则 $t\in\left(\frac{1}{3},\frac{4}{9}\right]$，所以 $P(t)=-5t^3+4t^2$，$t\in\left[\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right]$，则 $P'(t)=-15t^2+8t$，

当 $t\in\left(\frac{1}{3},\frac{4}{9}\right]$ 时，$P'(t)>0$，则当 $t=\frac{4}{9}$ 时，$P(t)_{\max}=\frac{256}{729}$，……………………………………… 10分

张华与刘中两同学在 $n$ 轮比赛中获得的积分数 $X$ 满足 $X\sim B(n,P)$，……………………………… 11分

所以由 $nP\geqslant5$，即 $n\times\frac{256}{729}\geqslant5$，解得 $n\geqslant5\times\frac{729}{256}\approx14.2$，因为 $n$ 为正整数，所以 $n$ 至少为15，

所以若张华与刘中同学这一组想至少获得5个积分，那么理论上至少要进行15轮竞赛．…………… 12分

21. 解：(1)由 $|OD|^2=|OC|\cdot|OP|$，得 $\frac{|OD|}{|OC|}=\frac{|OP|}{|OD|}$，∴ $\left|\frac{x_D}{x_C}\right|=\left|\frac{x_P}{x_D}\right|$，

由题意知：$x_C>0$，$x_P=4$，∴ $x_D^2=4x_C$，…………………………………………………………… 1分

若直线 $l$ 斜率不存在，即 $l:x=1$，此时 $x_C=1$，$x_D<2$，此时 $x_D^2=4x_C$ 不成立，

可知直线 $l$ 斜率存在，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$l:y=k(x-1)$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1)\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，∴ $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2},\\ x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2},\end{cases}$ ………………………… 3分

∴ $AB$ 中点的横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k^2}{3+4k^2}$，

设直线 $OP$ 的方程为 $y=k'x(k'\neq0)$，由 $\begin{cases}y=k'x,\\ y=k(x-1)\end{cases}$ 得 $x=\frac{k}{k-k'}$，即 $x_C=\frac{k}{k-k'}$，

由 $\begin{cases}y=k'x,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $x^2=\frac{12}{3+4k'^2}$，即 $x_D^2=\frac{12}{3+4k'^2}$，……………………………………………… 4分

由 $x_D^2=4x_C$ 得 $\frac{12}{3+4k'^2}=\frac{4k}{k-k'}$，整理可得 $k'=-\frac{3}{4k}$，所以 $x_C=\frac{k}{k+\frac{3}{4k}}=\frac{4k^2}{4k^2+3}=\frac{x_1+x_2}{2}$，

所以 $C$ 为线段 $AB$ 的中点，所以 $|AC|=|BC|$；……………………………………………………… 5分

(2)由(1)得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{\left(\frac{8k^2}{4k^2+3}\right)^2-4\times\frac{4k^2-12}{4k^2+3}}=\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$，……………………………………… 6分

因为 $AB\perp MN$，所以 $k_{MN}=-\frac{1}{k}$，则 $|MN|=\frac{12(k^2+1)}{3k^2+4}$． …………………………………………………… 7 分

所以四边形 $AMBN$ 面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\times|MN|=\frac{1}{2}\times\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}\times\frac{12(k^2+1)}{3k^2+4}=\frac{72(k^2+1)^2}{(4k^2+3)(3k^2+4)}$．

……………………………………………………………………………………………………… 9 分

（法一）$S=\frac{72(k^2+1)^2}{(4k^2+3)(3k^2+4)}\geqslant\frac{72(k^2+1)^2}{\left(\frac{4k^2+3+3k^2+4}{2}\right)^2}=\frac{288}{49}$，

当且仅当 $4k^2+3=3k^2+4$ 时取等号，即 $k=\pm1$ 时，$S_{\min}=\frac{288}{49}$． ………………………………………… 11 分

当 $k$ 不存在时，即 $AB\perp x$ 轴，此时 $MN$ 为椭圆 $\Gamma$ 的长轴，又 $|AB|=2\times\frac{3}{2}=3$，$|MN|=4$，

四边形 $AMBN$ 面积为 $\frac{1}{2}|AB|\cdot|MN|=6>\frac{288}{49}$．

所以四边形 $AMBN$ 面积的最小值为 $\frac{288}{49}$． ………………………………………………………… 12 分

（法二）令 $k^2+1=t$，$\because k\neq0$，$\therefore t>1$，则 $S=\frac{72t^2}{12t^2+t-1}=\frac{72}{-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+12}=\frac{72}{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{49}{4}}$，

当 $\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$，即 $k=\pm1$ 时，$S_{\min}=\frac{288}{49}$． ………………………………………………………… 11 分

当 $k$ 不存在时，即 $AB\perp x$ 轴，此时 $MN$ 为椭圆 $\Gamma$ 的长轴，又 $|AB|=2\times\frac{3}{2}=3$，$|MN|=4$，

四边形 $AMBN$ 面积为 $\frac{1}{2}|AB|\cdot|MN|=6>\frac{288}{49}$．

所以四边形 $AMBN$ 面积的最小值为 $\frac{288}{49}$． ………………………………………………………… 12 分

22．解：(1)由已知 $g(x)=\ln(x+1)-ax+\sin x$，

显然 $g(0)=0$，即 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的零点，

又 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-a+\cos x$，令 $m(x)=\frac{1}{x+1}-a+\cos x$，则 $m'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x$，

当 $-1<x<0$ 时，$-\frac{1}{(x+1)^2}<-1$，则 $m'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x<0$，

即 $g'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减． …………………………………………………………………… 2 分

当 $x>0$ 时，令 $n(x)=\ln(x+1)-x$，

则 $n'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}<0$，即 $n(x)$ 单调递减，$n(x)<n(0)=0$，即 $\ln(x+1)<x$，

令 $t(x)=\sin x-x$，则 $t'(x)=\cos x-1\leqslant0$，即 $t(x)$ 单调递减，$t(x)<t(0)=0$，即 $\sin x<x$，

所以 $\ln(x+1)+\sin x<2x<ax$，即 $g(x)=\ln(x+1)-ax+\sin x<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内无零点． …………………………………………………………………… 4 分

若 $a>2$ 时，当 $-1<x<0$ 时，因为 $g'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，

又 $-1<\frac{1}{a}-1<-\frac{1}{2}<0$，$g'\left(\frac{1}{a}-1\right)=\cos\left(\frac{1}{a}-1\right)>0$，$g'(0)=2-a<0$，

则存在 $x_1\in\left(\frac{1}{a}-1,0\right)$，使 $g'(x_1)=0$，即 $g(x)$ 在 $(-1,x_1)$ 上单调递增，在 $(x_1,0)$ 上单调递减，

又 $g(0)=0$，$x\to-1$ 时，$g(x)\to-\infty$，故 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 内存在 1 个零点，

所以当 $a>2$ 时，函数 $g(x)$ 有 2 个零点；…………………………………………………………………… 6 分

(2)当 $a>0$ 时，由已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，

又 $f(x)\leqslant a^2e^x-a(x+1)$ 恒成立，即 $\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 在 $x>-1$ 时恒成立．

当 $x=0$ 时，$\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 恒成立，即 $a^2-a\geqslant 0$，又 $a>0$，则 $a\geqslant 1$．…………………………………… 7 分

下面证明：当 $a\geqslant 1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 在 $x>-1$ 时恒成立．

由(1)得当 $x>-1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant x$．

要证明 $\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$，只需证明对任意的 $x\in(-1,+\infty)$，$a^2e^x-a\geqslant x$ 恒成立．

令 $\varphi(x)=a^2e^x-x-a$，则 $\varphi'(x)=a^2e^x-1$．

由 $\varphi'(x)=a^2e^x-1=0$，得 $x=\ln\frac{1}{a^2}=-2\ln a\leqslant 0$．

①当 $-2\ln a\leqslant -1$，即 $a\geqslant\sqrt{e}$ 时，$\varphi'(x)\geqslant 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，则 $\varphi(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

于是 $\varphi(x)>\varphi(-1)=\frac{a^2}{e}+1-a=\frac{1}{e}\left(a-\frac{e}{2}\right)^2+1-\frac{e}{4}>1-\frac{e}{4}>0$；…………………………………… 10 分

②当 $-2\ln a>-1$，即 $1\leqslant a<\sqrt{e}$ 时，$\varphi(x)$ 在 $(-1,-2\ln a)$ 上单调递减，在 $(-2\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

于是 $\varphi(x)\geqslant\varphi(-2\ln a)=\frac{a^2}{a^2}+2\ln a-a=2\ln a-a+1$．

令 $h(a)=2\ln a-a+1$，则 $h'(a)=\frac{2}{a}-1>\frac{2}{\sqrt{e}}-1>0$，则 $h(a)$ 在 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递增，

于是 $h(a)_{\min}=h(1)=0$，所以 $\varphi(x)\geqslant 0$ 恒成立，

所以 $a\geqslant 1$ 时，不等式 $a^2e^x-a\geqslant x$ 恒成立，因此 $a$ 的范围是 $[1,+\infty)$．…………………………………… 12 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。