学校________ 班级________ 姓名________ 准考证号________ 考场号________ 座位号________

密 封 线 内 不 要 答 题

数学试卷

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,**超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围:高考范围。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设 i 为虚数单位,复数 z 满足 $1+z\mathrm{i}=2\mathrm{i}$,则 $|z|=$

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. 5

2. 设集合 $A=\{x\,|\,|x-1|<2\}$,$B=\{y\,|\,y=2^x,x\in[0,2]\}$,则

A. $A\cap B=(1,3)$ B. $A\cap B=[1,4)$

C. $A\cup B=(-1,4]$ D. $A\cup B=(-1,3]$

3. “$0<t<\frac{\pi}{6}$”是“函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $(-t,t)$ 上单调递增”的

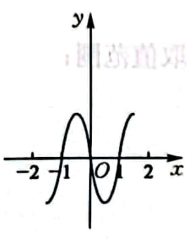
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

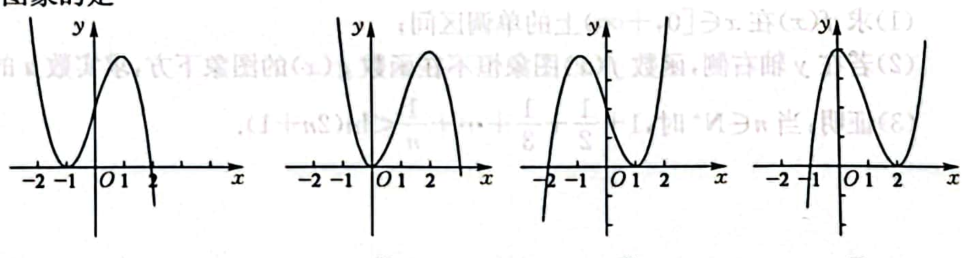
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知直线 $a^2x+y+2=0$ 与直线 $bx-(a^2+1)y-1=0$ 互相垂直,则 $|ab|$ 的最小值为

A. 1 B. 2 C. 4 D. 5

5. 已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如图所示(其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数),下面四个图象中可能是 $y=f(x)$ 图象的是





A B C D

6. 中国古代儒家要求学生掌握六种基本才能(六艺):礼、乐、射、御、书、数.某校国学社团周末开展“六艺”课程讲座活动,一天连排六节,每艺一节,则“射”与“数”之间最多间隔一艺的不同排课方法总数有

A. 432 种 B. 486 种 C. 504 种 D. 540 种

7. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，M 为 C 上的动点，N 为圆 $A:x^2+y^2+2x+8y+16=0$ 上的动点，设点 M 到 y 轴的距离为 d，则 $|MN|+d$ 的最小值为

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. 2

8. 已知不等式 $e^{kx}+1>\frac{(x+1)\ln x}{kx}$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为

A. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$

C. $(-\infty,0)\cup(e,+\infty)$　　D. $(e,+\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的是

A. 残差图中若样本数据对应的点分布的带状区域越狭窄，说明该模型的拟合精度越高

B. 在频率分布直方图中，各小长方形的面积等于各组的频数

C. 数据 1,3,4,5,7,9,11,16 的第 75 百分位数为 9

D. 某校共有男女学生 1 500 人，现按性别采用分层抽样的方法抽取容量为 100 人的样本，若样本中男生有 55 人，则该校女生人数是 675 人

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，$\{b_n\}$ 是公差大于 0 的等差数列，且 $a_3=b_3$，$a_7=b_7$，则

A. $a_5=b_5$　　B. $a_5<b_5$　　C. $a_1>b_1$　　D. $a_9>b_9$

11. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=\frac{2}{3}AA_1$，E,F,P,Q 分别为棱 AB,AD,DD_1,BB_1 的中点，则

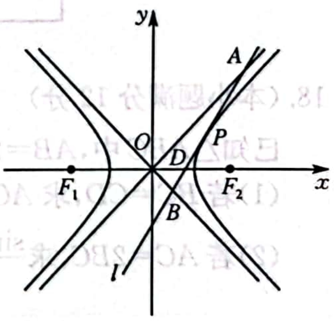
A. $AC\perp BP$

B. $B_1D\perp$ 平面 $EFPQ$

C. 平面 BC_1D∥平面 $EFPQ$

D. 直线 CE 和 FD_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$

12. 如图，过双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 右支上一点 P 作双曲线的切线 l 分别交两渐近线于 A,B 两点，交 x 轴于点 D，F_1,F_2 分别为双曲线的左、右焦点，O 为坐标原点，则下列结论正确的是



A. $\triangle AOB$ 的面积为 b

B. P 为 AB 的中点

C. $|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{b^2+1}$

D. 若存在点 P，使 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{4}$，且 $\overrightarrow{F_1D}=2\overrightarrow{DF_2}$，则双曲线 C 的离心率为 2

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知等边 $\triangle ABC$ 的重心为 O，边长为 3，则 $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}=$________.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α,β 的终边与单位圆的交点分别为 A,B，若直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，则 $\cos(\alpha+\beta)=$________.

15. 设函数 $f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=e^{-x}$，则 $f(\ln 3)$ 的值为________.

16. 表面积为 36π 的球 M 表面上有 A,B 两点，且 $\triangle AMB$ 为等边三角形，空间中的动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$，当点 P 在 $\triangle AMB$ 所在的平面内运动时，点 P 的轨迹是________；当 P 在该球的球面上运动时，点 P 的轨迹长度为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

羽毛球运动具有拼搏、进步、积极向上的意义，同时还要求运动员具备细心和迅速的敏锐性.某大学羽毛球运动协会为了了解本校学生对羽毛球运动是否有兴趣，从该校学生中随机抽取了 300 人进行调查，男女人数之比是 2∶1，其中女生对羽毛球运动有兴趣的占 80%，而男生有30 人表示对羽毛球运动没有兴趣.

(1)完成 2×2 列联表，根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，能否认为"对羽毛球运动是否有兴趣与性别有关"？

	有兴趣	没兴趣	合计
男			
女			
合计			

(2)为了提高同学们对羽毛球运动的参与度，该校举行一次羽毛球比赛.比赛分两个阶段进行，第一阶段的比赛赛制采取单循环方式，每场比赛采取三局二胜制，然后由积分的多少选出进入第二阶段比赛的同学，每场积分规则如下：比赛中以 2∶0 取胜的同学积 3 分，负的同学积 0 分；以 2∶1 取胜的同学积 2 分，负的同学积 1 分.其中，小强同学和小明同学的比赛倍受关注，设每局小强同学取胜的概率为 $p=\frac{3}{5}$，记小强同学所得积分为 X，求 X 的分布列和期望.

附表：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.50	0.40	0.25	0.150	0.100	0.050
x_α	0.455	0.780	1.323	2.072	2.706	3.841

18.（本小题满分 12 分）

已知△ABC 中，$AB=2$，D 为 AB 中点，$CD=\sqrt{2}$.

(1)若 $BC=CD$，求 AC 的长度；

(2)若 $AC=2BC$，求$\frac{\sin\angle ADC}{\sin B}$的值.

19.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n 满足$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{2n}{n+1}$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式；

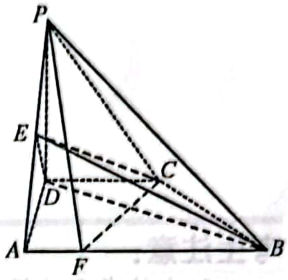
(2)设数列$\{c_n\}$满足 $c_n=\frac{b_n}{2^{n-1}}$，其前 n 项和为 T_n，是否存在正整数 n，使得 $T_n=4-n$ 成立？若存在，求出所有 n 的值；若不存在，请说明理由.

20.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AB/\!/DC$，$DC=AD=PD=1$，$AB=2$，E 为线段 PA 上一点，点 F 在边 AB 上且 $CF\perp BD$.

(1)若 E 为 PA 的中点，求四面体 $BCEP$ 的体积；

(2)在线段 PA 上是否存在点 E，使得 FE 与平面 PFC 所成角的余弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$？若存在，求出 AE 的长；若不存在，请说明理由.



21.（本小题满分 12 分）

设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，O 为坐标原点，椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)若椭圆 C 的上顶点为 W，且 $\triangle WF_1F_2$ 的面积为 $9\sqrt{3}$，求椭圆 C 的标准方程；

(2)设过椭圆 C 的内部点 $P(1,0)$ 且斜率为 $k\left(0<k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的直线 l 交 C 于 M，N 两点，若椭圆 C 上存在点 Q，使得 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OQ}$，求 b 的最大值.

22.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=xe^x-2ae^x$，$g(x)=-2-ax$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上的单调区间；

(2)若在 y 轴右侧，函数 $f(x)$ 图象恒不在函数 $g(x)$ 的图象下方，求实数 a 的取值范围；

(3)证明：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln(2n+1)$.