2023年3月广西高三模拟考试
数学参考答案(文科)

1. A 【解析】本题考查复数的运算,考查数学运算的核心素养.
因为 $iz=1-2i$,所以 $(iz)^2=(1-2i)^2$,即 $-z^2=-3-4i$,则 $z^2=3+4i$.

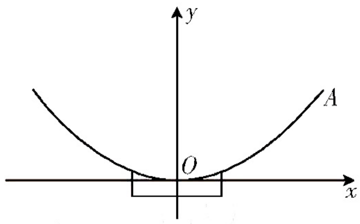
2. A 【解析】本题考查集合的并集,考查数学运算的核心素养.
因为 $A=\{x|x<\frac{1}{4}\}$,$B=\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{4}{3}\}$,所以 $A\cup B=\{x|x<\frac{4}{3}\}$.

3. B 【解析】本题考查等比数列,考查数学运算的核心素养.
因为 $a_4=2$,$a_5=3$,所以公比 $q=\frac{3}{2}$,所以 $a_7=a_5q^2=3\times\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$.

4. A 【解析】本题考查双曲线的定义与性质,考查逻辑推理的核心素养.
依题意可得 $2\sqrt{a+2a}>6$,则 $a>3$,则 $d=2\sqrt{a}>2\sqrt{3}$.

5. C 【解析】本题考查向量的线性运算与向量的数量积,考查数学运算的核心素养.
$|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2=1.5^2-1.2+2^2=5.05\ km^2$.

6. C 【解析】本题考查抛物线的性质,考查应用意识与数学建模的核心素养.
如图,以抛物线的顶点为坐标原点,对称轴为 y 轴,建立直角坐标系,依题意可得 A 的坐标为 $(\frac{9}{2},3)$. 设抛物线的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$,则 $\frac{81}{4}=6p$,解得 $p=\frac{27}{8}$. 故该抛物线的焦点到准线的距离为 $\frac{27}{8}$ cm.

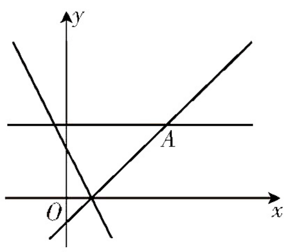


7. D 【解析】本题考查立体几何中球体的体积与几何概型,考查空间想象能力与运算求解能力.
在空间中,满足 $|AP|=1$ 的点 P 的轨迹为以 A 为球心,1 为半径的球面,所以在该长方体内,满足 $|AP|\leqslant1$ 的点 P 构成 $\frac{1}{8}$ 个球,根据几何概型可知,$|AP|\leqslant1$ 的概率为 $\frac{\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\pi\times1^3}{1\times1\times2}=\frac{\pi}{12}$.

8. C 【解析】本题考查函数的奇偶性,考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.
若 $F(x)=f(g(x))h(x)$,则 $F(-x)=f(g(-x))h(-x)=f(-g(x))h(x)=f(g(x))h(x)$,
则 $y=f(g(x))h(x)$ 是偶函数.
若 $F(x)=f(g(x))+h(x)$,则 $F(-x)=f(g(-x))+h(-x)=f(-g(x))+h(x)=f(g(x))+h(x)$,则 $y=f(g(x))+h(x)$ 是偶函数.
若 $F(x)=f(h(x))g(x)$,则 $F(-x)=f(h(-x))g(-x)=-f(h(x))g(x)$,则 $y=f(h(x))g(x)$ 是奇函数.
若 $F(x)=f(x)|g(x)|h(x)$,则 $F(-x)=f(-x)|g(-x)|h(-x)=f(x)|-g(x)|h(x)=f(x)|g(x)|\cdot h(x)$,则 $y=f(x)|g(x)|h(x)$ 是偶函数.

9. B 【解析】本题考查导数的应用,考查逻辑推理的核心素养.
依题意得 $f'(x)=(ax+a+1)e^x\geqslant0$ 对 $x\in[1,2]$ 恒成立,即 $ax+a+1\geqslant0$ 对 $x\in[1,2]$ 恒成立. 因为 $y=ax+a+1$ 的图象为直线,所以 $\begin{cases}a+a+1\geqslant0,\\2a+a+1\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant-\frac{1}{3}$.

10. C 【解析】本题考查简单的线性规划问题,考查数形结合的数学思想.
作出可行域,如图所示,当直线经过点 $A(4,3)$ 时,z 取得最大值,且最大值为 -2,故 $z=x-2y$ 的取值范围是 $(-\infty,-2]$.



11. A 【解析】本题考查三角函数的图象及其性质,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

由 $f(x_0)=3$，得 $\cos(\omega x_0-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，因为 $\omega>0$，所以当 $x\in(0,\frac{2\pi}{3}]$时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6}]$，依题意可得$\frac{5\pi}{3}\leqslant\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{3}$，解得$\frac{11}{4}\leqslant\omega<\frac{15}{4}$.

所以 ω 的最小值为$\frac{11}{4}$，$f(x)$的最小正周期的最大值为$\frac{2\pi}{\frac{11}{4}}=\frac{8\pi}{11}$.

12. C 【解析】本题考查指数、对数的运算以及函数与函数之间的变换，考查数学抽象的核心素养.

若 $x\in(0,+\infty)$，则 $ex\in(0,+\infty)$，所以函数 $f(ex)=(ex)^2e^{ex}-\ln(ex)=x^2e^{ex+2}-(1+\ln x)$的最小值与$f(x)$的最小值相等，因为 $g(x)=f(ex)+1$，所以 $g(x)$的最小值为 $m+1$.

13. 33 【解析】本题考查分层抽样，考查数据处理能力.

依题意可得乳制品类要被抽检样品的批次为 $198\times\frac{452}{2712}=198\times\frac{1}{6}=33$.

14. $(x-4)^2+y^2=1$(答案不唯一，方程满足$(x-a)^2+(y-b)^2=1((a-1)^2+b^2=9)$即可) 【解析】本题考查圆与圆的位置关系(开放题)，考查直观想象与数学运算的核心素养.

依题意可设所求圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=1$，根据两圆外切得两圆的圆心距为 $\sqrt{(a-1)^2+b^2}=1+2$，即$(a-1)^2+b^2=9$.

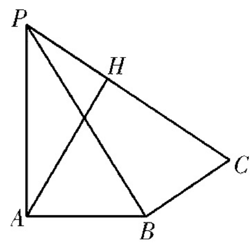
15. n^2+6n；5 【解析】本题考查等差数列，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

设公差为 d，则 $d=\frac{49-45}{22-20}=2$，$a_1=45-19\times2=7$，

则 $a_n=2n+5$，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2+6n$，所以$\frac{56n}{S_n}=\frac{56}{n+6}$.

若$\frac{56n}{S_n}$为整数，则 $n+6=7,8,14,28,56$，即 $n=1,2,8,22,50$，故满足条件的 n 的值有 5 个.

16. $\frac{6\sqrt{30}+8\sqrt{6}}{15}$ 【解析】本题考查古代数学文化与立体几何初步的交汇以及三角恒等变换，考查直观想象与数学运算的核心素养.



因为 $PA\perp$平面 ABC，所以 $PA\perp BC$，又 $AB\perp BC$，$AB\cap PA=A$，所以 $BC\perp$平面 PAB，则 $BC\perp PB$. 因为 $PA\perp$平面 ABC，所以 $PA\perp AB$，则 $PB=5$，$PC=\sqrt{30}$. 设$\angle APB=\alpha$，$\angle BPC=\beta$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

如图，将$\triangle PBC$ 沿着 PB 转动到 P,A,B,C 四点共面，此时 $\sin\angle APC=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{30}+4\sqrt{6}}{30}$，

过 A 作 $AH\perp PC$ 于 H，则 $AE+DE$ 的最小值为 $AH=PA\sin\angle APC=\frac{6\sqrt{30}+8\sqrt{6}}{15}$.

17.【分析】本题考查正弦定理与余弦定理的应用，第(2)问以开放式的题型考查运算求解能力与推理论证能力.

(1)证明：因为$\frac{b^2+c^2-a^2}{\sin B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{\sin A}$，所以由正弦定理得$\frac{b^2+c^2-a^2}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{a}$， ………………… 2 分

则$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$， ………………………………………………………… 4 分

即 $\cos A=\cos B$. ………………………………………………………………………… 5 分

因为 $y=\cos x$ 在$(0,\pi)$上单调递减，所以 $A=B$. ……………………………………… 6 分

(2)解：选①③作为条件证明②.

由(1)知，$a=b$，则 $AC=BC$. ……………………………………………………………… 7 分

因为 $CD=2$，所以 $AC=BC=4$， ………………………………………………………… 8 分

由余弦定理得 $\cos C=\frac{AC^2+CD^2-AD^2}{2AC\cdot CD}=\frac{16+4-16}{16}=\frac{1}{4}$，

故②成立. …………………………………………………………………………………………… 12 分

选①②作为条件证明③.

由(1)知,$a=b$,则 $AC=BC$. ……………………………………………………………………… 7 分

设 $CD=x$,则 $AC=BC=2x$, …………………………………………………………………………… 8 分

由余弦定理得 $\cos C=\frac{4x^2+x^2-16}{4x^2}=\frac{1}{4}$, ………………………………………………………… 10 分

解得 $x=2$,故③成立. ……………………………………………………………………………… 12 分

选②③作为条件证明①.

由(1)知,$a=b$,则 $AC=BC$. ……………………………………………………………………… 7 分

因为 $CD=2$,所以 $AC=BC=4$, …………………………………………………………………… 8 分

由余弦定理得 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos C=16$, …………………………………………… 10 分

则 $AD=4$,故①成立. ……………………………………………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问还可以这样证明:因为$\frac{b^2+c^2-a^2}{\sin B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{\sin A}$,所以$\frac{2bc\cos A}{\sin B}=\frac{2ac\cos B}{\sin A}$, …………… 2 分

即$\frac{b\cos A}{\sin B}=\frac{a\cos B}{\sin A}$,则$\frac{\sin B\cos A}{\sin B}=\frac{\sin A\cos B}{\sin A}$, ……………………………………………………… 4 分

即 $\cos A=\cos B$. ………………………………………………………………………………… 5 分

因为 $y=\cos x$ 在$(0,\pi)$上单调递减,所以 $A=B$. ………………………………………………… 6 分

【2】第(2)问若选择不同的组合分别解答,则按第一个解答计分.

18.**【分析】本题考查面面垂直的证明、线面角以及圆锥的体积,考查空间想象能力与运算求解能力.**

(1)证明:设 AB 与 CD 交于点 O,连接 PO. …………………………………………………… 1 分

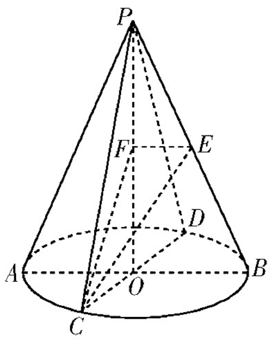
因为 AB,CD 为底面圆两条互相垂直的直径,所以 O 为底面圆的圆心, ……………………… 2 分

所以 PO 为圆锥的高,所以 $PO\perp$底面圆. ………………………………………………………… 3 分

因为 $CD\subset$底面圆,所以 $PO\perp CD$. …………………………………………………………… 4 分

又 $AB\perp CD,AB\cap PO=O$,所以 $CD\perp$平面 PAB. …………………………………………… 5 分

因为 $CD\subset$平面 PCD,所以平面 $PAB\perp$平面 PCD. ……………………………………………… 6 分



(2)解:过 E 作 $EF\perp PO$ 于 F,连接 CF. ………………………………………… 7 分

由(1)知平面 $PAB\perp$平面 PCD,且平面 $PAB\cap$平面 $PCD=PO$,所以 $EF\perp$平面 PCD, …………………………………………………………………………………… 8 分

所以$\angle ECF$ 为直线 CE 与平面 PCD 所成的角,则 $\tan\angle ECF=\frac{\sqrt{5}}{5}$. …………… 9 分

因为 $AB=4$,所以 $EF=\frac{1}{2}OB=1$,所以 $\tan\angle ECF=\frac{EF}{CF}=\frac{1}{CF}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

则 $CF=\sqrt{5}$, ……………………………………………………………………………… 10 分

所以 $PO=2OF=2\sqrt{5-2^2}=2$. ……………………………………………………………………… 11 分

故该圆锥的体积为$\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times2=\frac{8\pi}{3}$. …………………………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中,第 5 分处未写"$AB\cap PO=O$",扣 1 分;第 6 分处未写"$CD\subset$平面 PCD",扣 1 分.

【2】第(2)问中,第 8 分处未写"平面 $PAB\cap$平面 $PCD=PO$",扣 1 分,指出$\angle ECF$ 为直线 CE 与平面 PCD 所成的角即可得 1 分.

19.**【分析】本题考查统计中的增长百分数与回归分析,考查数据处理能力与推理论证能力.**

解:(1)因为广西 2020 年农村居民人均可支配收入为 14815 元,广西 2019 年农村居民人均可支配收入为 13676 元,所以广西 2020 年农村居民人均可支配收入的年增长率为$\frac{14815-13676}{13676}\times100\%=\frac{1139}{13676}\times100\%$

$\approx 8.3\%$. ………………………………………………………………………… 4分

(2)$\bar{x}=\dfrac{10359+11325+12435+13676+14815}{5}=\dfrac{62610}{5}=12522$. ………………………… 5分

因为 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=1.71x+m$,所以 $\hat{b}=1.71$, ………………………… 6分

所以 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\hat{b}\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=1.71\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-12522)^2\approx 21732390$, ………… 7分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\approx\dfrac{21732390}{1.71}=12709000$, ………………………………………… 8分

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}\approx\dfrac{21732390}{3560\times 6140}>\dfrac{21732390}{3600\times 6200}\approx 0.97$, ………… 10分

所以 $r>0.95$, ………………………………………………………………………… 11分

故 y 与 x 之间存在较好的线性关系. ……………………………………………………… 12分

评分细则:

【1】第(1)问写为 $\dfrac{14815-13676}{13676}=\dfrac{1139}{13676}\approx 8.3\%$,不扣分.

【2】第(2)问,若逐个计算得到 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\approx 21732390$,不扣分.

20.**【分析】本题考查导数的几何意义与导数的应用,考查逻辑推理、直观想象、数学运算的核心素养.**

解:(1)因为 $a=0$,所以 $f(x)=-2x-x\ln x$, $f'(x)=-3-\ln x$. ………………………………… 1分

①由 $f'(1)=-3$ 及 $f(1)=-2$, ……………………………………………………………… 2分

得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(-2)=-3(x-1)$,即 $y=-3x+1$. ……… 3分

②令 $f'(x)>0$,得 $0<x<\mathrm{e}^{3}$;令 $f'(x)<0$,得 $x>\mathrm{e}^{3}$. ……………………………………… 4分

所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^{3})$ 上单调递增,在 $(\mathrm{e}^{3},+\infty)$ 上单调递减, ……………………………… 5分

所以 $f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}^{3}$ 处取得极大值,$f(x)$ 没有极小值. ………………………………………… 6分

(2)由 $f(x)=0$,得 $ax-\ln x+a-2=0$, ……………………………………………………… 7分

则 $\dfrac{\ln x+2}{x+1}=a$. 设函数 $h(x)=\dfrac{\ln x+2}{x+1}$,则 $h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{(x+1)^2}$. ………………………… 8分

因为函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减,且 $\varphi(1)=0$,所以当 $0<x<1$ 时,$\varphi(x)>0$,当 $1<x<\mathrm{e}$ 时,$\varphi(x)<0$. ……………………………………………………………………… 9分

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减,

则 $h(x)_{\max}=h(1)=1$. ……………………………………………………………………… 10分

由 $h(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2})=0$, $h(\mathrm{e})=\dfrac{3}{\mathrm{e}+1}$, ………………………………………………………… 11分

得 $\dfrac{3}{\mathrm{e}+1}<a<1$,故 a 的取值范围是 $(\dfrac{3}{\mathrm{e}+1},1)$. ………………………………………… 12分

评分细则:

【1】第(1)问的切线方程还可以写为 $3x+y-1=0$.

【2】第(2)问还可以这样解答:

由 $f(x)=0$,得 $ax-\ln x+a-2=0$, ………………………………………………………… 7分

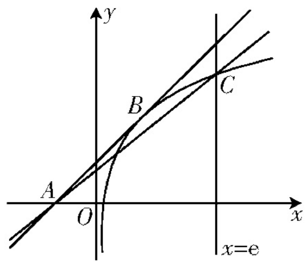
则 $a(x+1)=\ln x+2$. 设函数 $h(x)=\ln x+2$,则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}$. ……………………………… 8分

设直线 $y=a(x+1)$ 与曲线 $y=h(x)$ 切于点 $B(x_0,\ln x_0+2)$,

则 $\begin{cases}\dfrac{1}{x_0}=a,\\ a(x_0+1)=\ln x_0+2,\end{cases}$ ……………………………………………………… 9分

整理得 $a+\ln a=1$. 因为函数 $\varphi(x)=x+\ln x$ 为增函数，且 $\varphi(1)=1$，

所以 $a=1$. …………………………………………………………………… 10 分



直线 $y=a(x+1)$ 过定点 $A(-1,0)$，当该直线经过点 $C(\mathrm{e},3)$ 时，$a=\dfrac{3}{\mathrm{e}+1}$. ………

…………………………………………………………………………………… 11 分

数形结合可知，当且仅当 $\dfrac{3}{\mathrm{e}+1}<a<1$ 时，直线 $y=a(x+1)$ 与函数 $h(x)=\ln x+2(0<x<\mathrm{e})$ 的图象恰有两个交点，即 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上恰有两个零点，故 a 的取值范围是 $(\dfrac{3}{\mathrm{e}+1},1)$. … 12 分

21.【分析】本题考查直线与椭圆的综合，考查数学抽象、数学运算的核心素养.

(1)解：设直线 AB 的方程为 $y=2x+t$，因为点 A 的坐标为 $(0,1)$， ……………………………… 1 分

所以 $t=1$. …………………………………………………………………………………… 2 分

将 $y=2x+1$ 代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $9x^2+8x=0$， ……………………………………………… 3 分

解得 $x=0$ 或 $x=-\dfrac{8}{9}$，………………………………………………………………………… 4 分

所以点 B 的横坐标为 $-\dfrac{8}{9}$，纵坐标为 $2\times(-\dfrac{8}{9})+1=-\dfrac{7}{9}$.

故点 B 的坐标为 $(-\dfrac{8}{9},-\dfrac{7}{9})$. ………………………………………………………… 5 分

(2)证明：设 $B(x_1,y_1)$，直线 AB 的方程为 $y=2(x-x_1)+y_1$，代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $9x^2+8(y_1-2x_1)x+2(y_1-2x_1)^2-2=0$，…………………………………………………………………………… 6 分

则 $x_A=-\dfrac{8(y_1-2x_1)}{9}-x_1$，$y_A=2(x_A-x_1)+y_1$，可得点 A 的坐标为 $(\dfrac{7x_1-8y_1}{9},\dfrac{-4x_1-7y_1}{9})$. ……… 7 分

设 $C(x_2,y_2)$，直线 CD 的方程为 $y=-2(x-x_2)+y_2$，代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $9x^2-8(y_2+2x_2)x+2(y_2+2x_2)^2-2=0$， ………………………………………………………………………… 8 分

则 $x_D=\dfrac{8(y_2+2x_2)}{9}-x_2$，$y_D=-2(x_D-x_2)+y_2$，可得点 D 的坐标为 $(\dfrac{7x_2+8y_2}{9},\dfrac{4x_2-7y_2}{9})$. ………… 9 分

由 $k_{BC}=-\dfrac{1}{2}$，得 $y_1-y_2=-\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)$.

因为 $\dfrac{x_1^2}{2}+y_1^2=\dfrac{x_2^2}{2}+y_2^2$，所以 $y_1^2-y_2^2=-\dfrac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)$，则 $y_1+y_2=x_1+x_2$， ………………………… 10 分

则 $k_{AD}=\dfrac{\dfrac{4x_2-7y_2}{9}-\dfrac{-4x_1-7y_1}{9}}{\dfrac{7x_2+8y_2}{9}-\dfrac{7x_1-8y_1}{9}}=\dfrac{4(x_1+x_2)+7(y_1-y_2)}{-7(x_1-x_2)+8(y_1+y_2)}=\dfrac{4(x_1+x_2)-\dfrac{7}{2}(x_1-x_2)}{-7(x_1-x_2)+8(x_1+x_2)}=\dfrac{1}{2}$.

故直线 AD 的斜率为定值. ………………………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问未写点 A 的坐标，但得出椭圆的上顶点为 $(0,1)$，不扣分.

【2】第(2)问如果用其他方法解答，请根据步骤给分.

22.【分析】本题考查参数方程与极坐标，考查数学建模、数学运算的核心素养.

解：(1)在曲线 C 的参数方程中消去参数 t，可得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$，………… 2 分

则 $x^2+y^2-4x-4y+3=0$，…………………………………………………………………………… 3 分

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入得 $\rho^2-4\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+3=0$，

此即为 C 的极坐标方程. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)由 $\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta-1=0$，得 $x-3y-1=0$，…………………………………………………

联立$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=5,\\x-3y-1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$

不妨设点 A 的直角坐标为$(1,0)$,则点 B 的直角坐标为$(4,1)$. ………………………………………… 7 分

因为直线 l_2 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}$,所以直线 l_2 的直角坐标方程为 $y=x$.

设点 P 的直角坐标为(x,x),…………………………………………………………………… 8 分

由$\overrightarrow{PA}=(1-x,-x)$,$\overrightarrow{PB}=(4-x,1-x)$,得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(1-x)(4-x)-x(1-x)=2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}$, ……

………………………………………………………………………………………………… 9 分

当 $x=\frac{3}{2}$ 时,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$取得最小值$-\frac{1}{2}$. ………………………………………………… 10 分

评分细则:

【1】第(1)问严格按照步骤给分.

【2】第(2)问中,考生如果得到$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2x^2-6x+4$ 后,未配方,而写为“当 $x=-\frac{-6}{2\times2}=\frac{3}{2}$ 时,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$取得最小值$-\frac{1}{2}$”,不扣分.

23.**【分析】本题考查不等式选讲中不等式的证明与基本不等式的应用,考查逻辑推理、数学运算的核心素养.**

(1)证明:由 $a^2+b^2+2c^2=4$,得 $a^2+b^2=4-2c^2$, ……………………………………………… 1 分

由 $a+b+c=3$,得 $a+b=3-c$, ………………………………………………………………… 2 分

由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,得 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2$(当且仅当 $a=b$ 时,等号成立), ……………………… 3 分

则 $4-2c^2\geqslant\frac{1}{2}(3-c)^2$,解得$\frac{1}{5}\leqslant c\leqslant 1$. ……………………………………………………… 5 分

(2)解:当 $a=b$ 时,$2b^2+2c^2=4$,即 $b^2+c^2=2$. ………………………………………………… 6 分

由 $b^4+c^4\geqslant\frac{1}{2}(b^2+c^2)^2$(当且仅当 $b=c$ 时,等号成立),

得 $t=\frac{b^4+c^4}{bc}\geqslant\frac{(b^2+c^2)^2}{2bc}=\frac{2(b^2+c^2)}{2bc}\geqslant\frac{4bc}{2bc}=2$(当且仅当 $b=c=1$ 时,等号成立). …………………… 8 分

因为函数 $f(t)=t+\frac{1}{t}(t\geqslant 2)$为增函数,所以 $f(t)_{\min}=f(2)=\frac{5}{2}$, …………………………………… 9 分

因为$\frac{b^4+c^4}{bc}+\frac{bc}{b^4+c^4}=t+\frac{1}{t}(t\geqslant 2)$,所以$\frac{b^4+c^4}{bc}+\frac{bc}{b^4+c^4}$的最小值为$\frac{5}{2}$. ……………………………… 10 分

评分细则:

【1】第(1)问未写“当且仅当 $a=b$ 时,等号成立”,扣 1 分.

【2】第(2)问用其他方法作答,按照步骤给分.