2023 届高三 信息押题卷(二) 全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】因为 $A=\{x|y=\sqrt{5-3x}\}=\left\{x\left|x\leqslant\frac{5}{3}\right.\right\}$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=\left\{x\left|x>\frac{5}{3}\right.\right\}$,$B=\{x|x^2-2x<3\}=\{x|-1<x<3\}$,所以$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$

$A\cap B=\left\{x\left|\frac{5}{3}<x<3\right.\right\}$.故选 A.

2.C 【解析】由$\frac{2-\mathrm{i}}{z}=1+\mathrm{i}$ 得 $z=\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{1-3\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$,所以 $\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$,所以 $4z\cdot\bar{z}=(1-3\mathrm{i})\cdot(1+3\mathrm{i})=10$.故选 C.

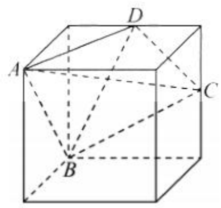
3.B 【解析】因为 $f(x)=\frac{3x^2\cos 2x}{2^{|x|}}$,其定义域为 $\mathbf{R}$,所以 $f(-x)=\frac{3x^2\cos 2x}{2^{|x|}}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,故排除选项 A,D.又因为 $f(2)=\frac{12\cos 4}{4}=3\cos 4$,因为 $4\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,所以 $\cos 4<0$,所以 $f(2)<0$,故排除选项 C.故选 B.

4.A 【解析】因为在 100 人中随机抽取 1 人,抽到喜爱该商品的男顾客的概率为$\frac{2}{5}$.所以喜爱该商品的男顾客人数为 $100\times\frac{2}{5}=40$,列联表补充如下:

	喜爱该商品	不喜爱该商品	合计
男顾客	40	10	50
女顾客	35	15	50
合计	75	25	100

由 $K^2=\frac{100\times(40\times15-10\times35)^2}{50\times50\times75\times25}=\frac{4}{3}\approx1.333$.因为 $1.333>1.323$,所以有超过 75% 的把握认为喜爱该商品与性别有关.故选 A.

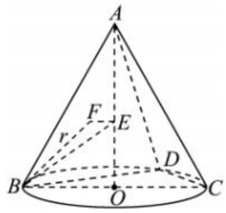
5.C 【解析】由三视图知,该几何体是正方体中的三棱锥 $A-BCD$,$S_{\triangle BCD}=6\times6-\frac{1}{2}\times6\times3-\frac{1}{2}\times3\times3-\frac{1}{2}\times6\times3=\frac{27}{2}$,所以该几何体的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{27}{2}\times6=27$.故选 C.



6.D 【解析】由题意可知,数列$\{a_n\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列,故 $a_n=2^n(1\leqslant n\leqslant31,n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.由 $a_{n+1}^2+256\geqslant(S_n+2)(t+5)$,得 $2^{2n+2}+256\geqslant(t+5)\cdot2^{n+1}$,整理得 $t\leqslant\frac{256}{2^{n+1}}+2^{n+1}-5$ 对任意 $1\leqslant n\leqslant31$,且 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,又$\frac{256}{2^{n+1}}+2^{n+1}-5\geqslant2\sqrt{\frac{256}{2^{n+1}}\cdot2^{n+1}}-5=27$,当且仅当 $2^{n+1}=16$,即 $n=3$ 时等号成立,所以 $t\leqslant27$,即实数 t 的最大值为 27.故选 D.

7.D 【解析】$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_{12}^r\cdot x^{12-r}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^r\cdot\mathrm{C}_{12}^r\cdot x^{12-\frac{3r}{2}}$,$r\in\{0,1,\cdots,12\}$,令 $12-\frac{3r}{2}=3$ 得 $r=6$;令 $12-\frac{3r}{2}=0$ 得 $r=8$.所以$(x^3-x^2)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$的展开式中含 x^5 的系数为$(-1)^8\cdot\mathrm{C}_{12}^8-(-1)^6\cdot\mathrm{C}_{12}^6=495-924=-429$.故选 D.

8.B 【解析】因为圆 O 的面积为 4π,所以圆 O 的半径 $OB=OC=2$,因为母线与底面所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以$\frac{2}{\sqrt{OA^2+2^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以圆锥的高 $OA=4$,因为点 D 在底面圆周上,所以 $AB=AC=AD=2\sqrt{5}$,要使三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大,则点 D 到 BC 的距离最大,即 $OD=2$,此时 $BD=2\sqrt{2}$.在$\triangle ABD$ 中,由余弦定



理得 $\cos\angle BAD=\dfrac{20+20-8}{2\times 2\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$，所以 $\sin\angle BAD=\dfrac{3}{5}$，由正弦定理得△$ABD$ 的外接圆半径 $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\times\dfrac{3}{5}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$，设△$ABD$ 的外接圆的圆心为 F，即 $BF=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$，设圆锥的外接球的球心为 E，半径为 R，连接 AO，依题意，E 在 AO 上，在 Rt△BOE 中，$(4-R)^2+4=R^2$，解得 $R=\dfrac{5}{2}$，即 $BE=\dfrac{5}{2}$，在 Rt△BEF 中，$BE^2=BF^2+EF^2$，所以 $EF=\sqrt{\dfrac{25}{4}-\dfrac{50}{9}}=\dfrac{5}{6}$，所以当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时，圆锥的外接球的球心到平面 ABD 的距离为 $\dfrac{5}{6}$.故选 B.

9.C 【解析】由函数图象可知，最小正周期为 $T=4\left(\dfrac{11\pi}{4}-\dfrac{5\pi}{4}\right)=6\pi$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{6\pi}=\dfrac{1}{3}$，将点 $\left(\dfrac{5\pi}{4},3\right)$ 代入 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)$，得 $3=3\sin\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5\pi}{4}+\varphi\right)$，又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{12}$，故 $f(x)=3\sin\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{12}\right)$，故 A 错误；所以 $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=3\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，故 B 错误；令 $f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$，则 $\sin\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{12}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}$，所以 $2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{12}\leqslant 2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $6k\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 6k\pi+\dfrac{9\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以不等式 $f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$ 的解集为 $\left[6k\pi+\dfrac{\pi}{4},6k\pi+\dfrac{9\pi}{4}\right]k\in\mathbf{Z}$，故 C 正确；将 $f(x)=3\sin\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度后，得到 $f(x)=3\sin\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{18}\right)$ 的图象，令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{18}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $6k\pi-\dfrac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant 6k\pi+\dfrac{4\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=1$ 得 $\dfrac{13\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{22\pi}{3}$，因为 $[6\pi,8\pi]\not\subset\left[\dfrac{13\pi}{3},\dfrac{22\pi}{3}\right]$，故 D 错误.故选 C.

10.D 【解析】因为 $f(x)=x^3+2x+2$，所以 $f'(x)=3x^2+2$，因为 $x\in[-2,2]$，所以 $f'(x)>0$，即 $f(x)$在$[-2,2]$上单调递增，所以 $M=f(2)=14$，$m=f(-2)=-10$，所以 $M+m=4$，所以 $g(x)=4x+\dfrac{1}{(4x-1)^3}$，$g(x)-1=4x-1+\dfrac{1}{(4x-1)^3}$，因为 $h(t)=t+\dfrac{1}{t^3}$是奇函数，关于原点对称，所以 $g(x)$ 关于 $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$ 中心对称，易知点 $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$ 在圆 $x^2+y^2=5$ 的内部，因为点 $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$ 到坐标原点的距离为 $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$，所以所求最短弦长为 $2\sqrt{5-\dfrac{17}{16}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.故选 D.

11.D 【解析】因为抛物线方程为 $y^2=-12x$，所以焦点 $F(-3,0)$，设点 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，因为△ABF 的重心坐标为 $\left(-\dfrac{4}{3},-2\right)$，由重心坐标公式可得 $\dfrac{x_A+x_B-3}{3}=-\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{y_A+y_B+0}{3}=-2$，得 $x_A+x_B=-1$，$y_A+y_B=-6$，由抛物线的定义可得 $|FA|-|FB|=3-x_A-(3-x_B)=x_B-x_A=\dfrac{y_A^2-y_B^2}{12}$，由点在抛物线上可得 $\begin{cases}y_A^2=-12x_A,\\ y_B^2=-12x_B,\end{cases}$ 作差 $y_A^2-y_B^2=-12(x_A-x_B)$，化简得 $k_{AB}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=-\dfrac{12}{y_A+y_B}=2$，由弦长公式得 $|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\cdot|y_A-y_B|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot|y_A-y_B|$，则 $\dfrac{\big||FA|-|FB|\big|}{|AB|}=\dfrac{\left|\dfrac{y_A^2-y_B^2}{12}\right|}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot|y_A-y_B|}=\dfrac{\sqrt{5}|y_A+y_B|}{30}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.故选 D.

12.C 【解析】因为 $x^3+(\mathrm{e}-2m)x^2+x+\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}(\ln x+1)$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $x^3+(\mathrm{e}-2m)x^2+x\geqslant\mathrm{e}(\ln x+1)-\mathrm{e}^x$ 在$(0,+\infty)$恒成立，设 $g(x)=x^3+(\mathrm{e}-2m)x^2+x$，$h(x)=\mathrm{e}(\ln x+1)-\mathrm{e}^x$，则 $g(x)\geqslant h(x)$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立.所以 $g(1)\geqslant h(1)$，即 $1+(\mathrm{e}-2m)+1>0$，解得 $m\leqslant\dfrac{\mathrm{e}}{2}+1$.下面证明当 $m\leqslant\dfrac{\mathrm{e}}{2}+1$ 时，$g(x)\geqslant h(x)$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立.由 $h(x)=\mathrm{e}(\ln x+1)-\mathrm{e}^x$ 得 $h'(x)=\dfrac{\mathrm{e}}{x}-\mathrm{e}^x=\dfrac{\mathrm{e}-x\mathrm{e}^x}{x}$，令 $m(x)=\mathrm{e}-x\mathrm{e}^x$，则有 $m(1)=\mathrm{e}-\mathrm{e}=0$，且 $m'(x)=-(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x)<0$，所以 $m(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以当 $x\in(0,1)$时，$m(x)>0$，即 $h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$时，$m(x)<0$，即 $h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(1)=\mathrm{e}-\mathrm{e}=0$，为使 $g(x)\geqslant h(x)$对 $\forall x\in(0,+\infty)$恒成立，所以 $x^3+(\mathrm{e}-2m)x^2+x\geqslant 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，即 $x^2+(\mathrm{e}-2m)x+1\geqslant 0$ 在$(0,+\infty)$恒成立，即$(2m-\mathrm{e})x\leqslant x^2+1$ 在$(0,+\infty)$恒成立，即 $2m-\mathrm{e}\leqslant x+\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$

恒成立，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当 $x=1$ 时，等号成立，所以 $\left(x+\frac{1}{x}\right)_{\min}=2$．又因为 $m\leqslant 1+\frac{e}{2}$，所以 $2m-e\leqslant 2$，所以 $2m-e\leqslant x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，所以 $g(x)\geqslant h(x)$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立．综上所述，当且仅当 $m\leqslant 1+\frac{e}{2}$ 时，$g(x)\geqslant h(x)$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $x^3+(e-2m)x^2+x+e^x\geqslant e(\ln x+1)$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，所以 m 的最大整数值为 2．故选 C．

13．$-\frac{3}{2}$ 【解析】因为 $|\overrightarrow{OA}|=1$，由正六边形的性质知，$|\overrightarrow{BC}|^2=2|\overrightarrow{OA}|^2-2|\overrightarrow{OA}|^2\cos\frac{2\pi}{3}=3|\overrightarrow{OA}|^2=3$，即 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$，易知 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $\frac{5\pi}{6}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{BC}|\cos\frac{5\pi}{6}=1\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}$．

14．$\frac{3}{32}$ 【解析】事件 AB：甲同学选安全防范服务且五名同学所选项目各不相同，所以其它 4 名同学排列在其它 4 个项目，且互不相同，为 A_4^4，事件 B：甲同学选安全防范服务，所以其它 4 名同学排列在其它 4 个项目，可以安排在相同项目，为 4^4，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{A_4^4}{5^5}}{\frac{4^4}{5^5}}=\frac{3}{32}$．

15．$\frac{19}{3}-\frac{4}{2n+1}$ 【解析】因为 $a_1+3a_2+5a_3+\ldots+(2n-1)a_n=2n+3(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_1+3a_2+5a_3+\ldots+(2n-3)a_{n-1}=2n+1(n\geqslant 2)$，两式相减，可得 $(2n-1)a_n=2$，即 $a_n=\frac{2}{2n-1}(n\geqslant 2)$，又当 $n=1$ 时，$a_1=5$，不满足 $a_n=\frac{2}{2n-1}$，所以 $a_n=\begin{cases}5, n=1,\\ \frac{2}{2n-1}, n\geqslant 2,\end{cases}$ 所以当 $n\geqslant 2$ 时，$2a_na_{n+1}=\frac{8}{(2n-1)(2n+1)}=4\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，所以 $S_n=5+4\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=5+4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{19}{3}-\frac{4}{2n+1}$．

16．$(-2,0)$ 【解析】因为双曲线方程为 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 一条渐近线的倾斜角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\frac{b}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，解得 $b=2$，所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=mx+n,\\ \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(4-5m^2)x^2-10mnx-5n^2-20=0$，因为 $4-5m^2\neq 0$，$m^2<4$，所以 $\Delta=(-10mn)^2+4\times(4-5m^2)(5n^2+20)=80(n^2+4-5m^2)>0$，由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{10mn}{4-5m^2}$，$x_1x_2=-\frac{5n^2+20}{4-5m^2}$，因为 $\frac{1}{k_{OA}}+\frac{1}{k_{OB}}=\frac{10}{m}$，所以 $\frac{1}{k_{OA}}+\frac{1}{k_{OB}}=\frac{1}{\frac{y_1}{x_1}}+\frac{1}{\frac{y_2}{x_2}}=\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1y_2}=\frac{x_1(mx_2+n)+x_2(mx_1+n)}{(mx_1+n)(mx_2+n)}=\frac{2mx_1x_2+n(x_1+x_2)}{m^2x_1x_2+mn(x_1+x_2)+n^2}=\frac{-2m\cdot\frac{5n^2+20}{4-5m^2}+n\cdot\frac{10mn}{4-5m^2}}{-m^2\cdot\frac{5n^2+20}{4-5m^2}+mn\cdot\frac{10mn}{4-5m^2}+n^2}=\frac{10m}{5m^2-n^2}=\frac{10}{m}$，所以 $n=2m$，所以直线方程为 $y=mx+2m=m(x+2)$，恒经过的定点为 $(-2,0)$．

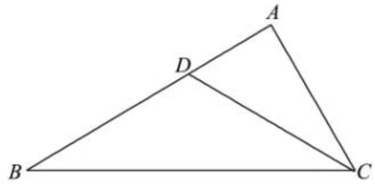
17．解：(1)因为 $2\cos^2 2C=3-5\cos 2\left(\frac{23\pi}{2}-C\right)$，

所以 $2\cos^2 2C-5\cos 2C-3=0$，解得 $\cos 2C=-\frac{1}{2}$ 或 $\cos 2C=3$（舍去），…………………… 2 分

所以 $2\cos^2 C-1=-\frac{1}{2}$，即 $\cos C=\pm\frac{1}{2}$，

因为 $0<C<\frac{\pi}{2}$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$．…………………… 4 分

(2)如图，因为 $BD=2AD$，$BD=CD$，设 $AD=m$，$BD=CD=2m$，



在△ABC 中，由余弦定理得 $9m^2=AC^2+BC^2-AC\cdot BC$，…… 5 分

在△BCD 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\dfrac{(2m)^2+(2m)^2-BC^2}{2\times2m\times2m}=\dfrac{8m^2-BC^2}{8m^2}$，

在△ADC 中，由余弦定理得 $\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\dfrac{m^2+(2m)^2-AC^2}{2m\times2m}=\dfrac{5m^2-AC^2}{4m^2}$，…… 9 分

因为 $\angle BDC+\angle ADC=\pi$，所以 $\cos\angle BDC+\cos\angle ADC=0$，

即 $\dfrac{8m^2-BC^2}{8m^2}+\dfrac{5m^2-AC^2}{4m^2}=0$，所以 $18m^2-BC^2-2AC^2=0$，…… 10 分

所以 $2AC^2+2BC^2-2AC\cdot BC-BC^2-2AC^2=0$，

因为 $BC\neq0$，所以 $BC=2AC$，

所以 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{2}$. …… 12 分

18.**解**：(1)依题意，这 10 名学生投中球的个数的平均数为 $\dfrac{1}{10}\times(6+3\times7+2\times8+3\times9+10)=8$. …… 2 分

方差为 $s^2=\dfrac{1}{10}(1^2+1^2+0^2+1^2+0^2+2^2+1^2+1^2+2^2+1^2)=1.1$. …… 4 分

(2)依题意，这 10 名学生中，投中 9 个或 10 个球的有 4 人.

所以 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4. …… 5 分

$P(X=0)=\dfrac{C_4^0C_6^4}{C_{10}^4}=\dfrac{15}{210}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_6^3}{C_{10}^4}=\dfrac{80}{210}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_6^2}{C_{10}^4}=\dfrac{90}{210}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3C_6^1}{C_{10}^4}=\dfrac{24}{210}$，$P(X=4)=\dfrac{C_4^4C_6^0}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{210}$.

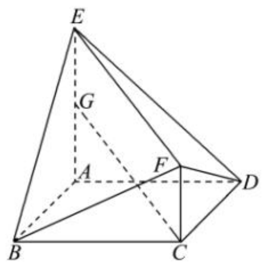
所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{15}{210}$	$\frac{80}{210}$	$\frac{90}{210}$	$\frac{24}{210}$	$\frac{1}{210}$

…… 10 分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{15}{210}+1\times\dfrac{80}{210}+2\times\dfrac{90}{210}+3\times\dfrac{24}{210}+4\times\dfrac{1}{210}=\dfrac{336}{210}=\dfrac{8}{5}$. …… 12 分

19.(1)**证明**：连接 CG 因为 G 为 AE 的中点，$AE/\!/CF$，$AE=2CF$，，



所以 $GE=CF$，$GE/\!/CF$，

所以四边形 $CFEG$ 是平行四边形，…… 2 分

所以 $CG/\!/FE$.

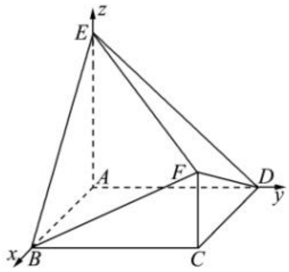
因为 $FE\subset$ 平面 DEF，$CG\not\subset$ 平面 DEF，

所以 CG // 平面 DEF. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)**解**:因为四边形 $ABCD$ 是正方形,$AE\perp$ 平面 $ABCD$,

所以 AB,AD,AE 两两垂直.

以 A 为坐标原点,以 AB,AD,AF 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图所示空间直角坐标系,



因为 AE // CF,$AB=AE=2CF=2$.

所以 $B(2,0,0),D(0,2,0),E(0,0,2),F(2,2,1)$, ………………………………………… 6 分

从而 $\overrightarrow{EF}=(2,2,-1),\overrightarrow{BF}=(0,2,1),\overrightarrow{DF}=(2,0,1)$.

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=2x+2y-z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=2y+z=0,\end{cases}$

令 $z=2$,得 $y=-1,x=2$,即 $\boldsymbol{m}=(2,-1,2)$. ………………………………………… 8 分

设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=2x+2y-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=2x+z=0,\end{cases}$

令 $z=2$,得 $x=-1,y=2$,即 $\boldsymbol{n}=(-1,2,2)$. ………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{(2,-1,2)\cdot(-1,2,2)}{3\times3}=0$,

所以二面角 $B-EF-D$ 的正弦值为 1. ………………………………………… 12 分

20.**解**:(1)设 $F_1(-c,0)(c>0)$,因为过点 F_1 的直线在 y 轴上的截距为 1.

所以直线 MN 的方程为 $\dfrac{x}{-c}+y=1$,即 $y=\dfrac{1}{c}x+1$.

因为 F_2 到直线 MN 的距离为 $\sqrt{2}$,所以 $\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{c^2}+1}}=\sqrt{2}$,解得 $c=1$. ………………………………………… 2 分

因为 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $a=\sqrt{3}$,因为 $b^2=a^2-c^2=3-1=2$, ………………………… 3 分

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ………………………………………… 4 分

(2)设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,

由(1)知直线 MN 的方程为 $y=x+1$,

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1,\\ y=x+1,\end{cases}$ 消去 y 得 $5x^2+6x-3=0$,

由韦达定理得 $x_1+x_2=-\dfrac{6}{5},x_1x_2=-\dfrac{3}{5}$, ………………………………………… 6 分

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{6}{5}+2=\dfrac{4}{5},y_1y_2=x_1x_2+x_1+x_2+1=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{6}{5}+1=-\dfrac{4}{5}$.

因为 $P(0,m)$,所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(x_1,y_1-m)\cdot(x_2,y_2-m)=x_1x_2+y_1y_2-m(y_1+y_2)+m^2=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}-\dfrac{4}{5}m+m^2=m^2-\dfrac{4}{5}m-\dfrac{7}{5}$,

因为$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}\leqslant\frac{6}{5}m+\frac{33}{5}$，所以$m^2-\frac{4}{5}m-\frac{7}{5}\leqslant\frac{6}{5}m+\frac{33}{5}$，解得$-2\leqslant m\leqslant 4$. ………… 8分

由弦长公式得$|MN|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2-4\times\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{8\sqrt{3}}{5}$，

由点到直线的距离公式得P到直线MN的距离$h=\frac{|m-1|}{\sqrt{2}}$， ………… 10分

所以$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot h=\frac{4\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{|m-1|}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}|m-1|$，

所以$S_{\triangle PMN}$的最大值是$\frac{6\sqrt{6}}{5}$. ………… 12分

21.**解**：(1)因为$f(x)=a\ln x+2x^2(x>0)$，

所以$f'(x)=\frac{a}{x}+4x=\frac{a+4x^2}{x}$.

当$a\geqslant 0$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，无最大值，也无最小值； ………… 2分

当$a<0$时，令$f'(x)>0$，即$a+4x^2>0$，所以$x>\frac{\sqrt{-a}}{2}$；

令$f'(x)<0$，即$a+4x^2<0$，所以$0<x<\frac{\sqrt{-a}}{2}$，

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{\sqrt{-a}}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{\sqrt{-a}}{2},+\infty\right)$上单调递增.

所以$x=\frac{\sqrt{-a}}{2}$时$f(x)$取得极小值，也是最小值，$f\left(\frac{\sqrt{-a}}{2}\right)=a\ln\frac{\sqrt{-a}}{2}-\frac{a}{2}$，无最大值.

综上，当$a\geqslant 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上无最大值，也无最小值；

当$a<0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上有最小值$a\ln\frac{\sqrt{-a}}{2}-\frac{a}{2}$，无最大值. ………… 4分

(2)因为$a=-1$，$x\in(0,1]$时，$f(x)=-\ln x+2x^2$.

$(2-x)e^x+x-2x^2+f(x)>m$恒成立，即$m<(2-x)e^x+x-\ln x$恒成立. ………… 5分

设$g(x)=(2-x)e^x-\ln x+x$，$0<x\leqslant 1$，

$g'(x)=-e^x+(2-x)e^x-\frac{1}{x}+1=(x-1)\left(\frac{1}{x}-e^x\right)$.

设$h(x)=\frac{1}{x}-e^x$，则$h'(x)=-\frac{1}{x^2}-e^x<0$，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

又$h\left(\frac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0$，$h(1)=1-e<0$，所以存在唯一的$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$h(x_0)=0$，$\frac{1}{x_0}=e^{x_0}$，

当$0<x<x_0$时，$h(x)>0$，当$x>x_0$时，$h(x)<0$，

所以当$0<x<x_0$时，$g'(x)<0$，当$x_0<x<1$时，$g'(x)>0$，

$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,1)$上单调递增，

$g(x)_{\min}=g(x_0)=(2-x_0)e^{x_0}+x_0-\ln x_0$，显然$g(x_0)<g(1)=e+1\in(3,4)$，

由$\frac{1}{x_0}=e^{x_0}$得$g(x_0)=\frac{2-x_0}{x_0}+x_0+x_0=2x_0+\frac{2}{x_0}-1$， ………… 9分

设$u(x)=2x+\frac{2}{x}-1\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$，$m'(x)=2-\frac{2}{x^2}<0$在$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时恒成立，

$u(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递减，$u(x)>u(1)=2+2-1=3$，

$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以$u(x_0)=2x_0+\frac{2}{x_0}-1>u(1)=3$，

所以$g(x)_{\min}=g(x_0)\in(3,4)$，

则满足 $m<g(x_0)$ 的最大的正整数 m 的值为 3. …… 12 分

22.**解**:(1)由 $\begin{cases}x=-2+3\cos\alpha,\\ y=3\sin\alpha\end{cases}$ 得 $(x+2)^2+y^2=9$,即为曲线 C 的普通方程; …… 2 分

由 $2+\rho\left(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta+2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\right)=2\rho\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ 得 $2+\rho\sin\theta=\rho\cos\theta$,

因为 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得 $x-y-2=0$,即为直线 l 的平面直角坐标方程. …… 5 分

(2)由(1)知直线 l 的平面直角坐标方程为 $x-y-2=0$,

由直线 l 与 x,y 轴交点分别为 A,B 得 $A(2,0),B(0,-2)$,所以 $|AB|=2\sqrt{2}$, …… 6 分

因为曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=-2+3\cos\alpha,\\ y=3\sin\alpha,\end{cases}$

设 $E(-2+3\cos\alpha,3\sin\alpha)(0\leqslant\theta<2\pi)$,

则 E 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|-2+3\cos\alpha-3\sin\alpha-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|3\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)+4\right|}{\sqrt{2}}$,

由 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ 时,d 取最大值 $\dfrac{3\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$.

所以此时 $\triangle ABE$ 的面积最大值为 $\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times(3+2\sqrt{2})=4+3\sqrt{2}$. …… 10 分

23.**解**:(1)由 $f(x)<5x+1$ 可得 $2|x-1|-|x+3|<5x+1$,

即 $\begin{cases}x<-3,\\ -2(x-1)+(x+3)<5x+1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant1,\\ -2(x-1)-(x+3)<5x+1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>1,\\ 2(x-1)-(x+3)<5x+1,\end{cases}$ …… 3 分

解得 $x\in\varnothing$ 或 $-\dfrac{1}{4}<x\leqslant1$ 或 $x>1$, …… 4 分

所以原不等式的解集为 $\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$. …… 5 分

(2)因为对 $\forall a\in\mathbf{R}$,不等式 $f(x)\leqslant|x+3|+2a^2-3a+1$ 恒成立,

所以 $2(|x-1|-|x+3|)\leqslant2a^2-3a+4$ 恒成立. …… 6 分

因为 $|x-1|-|x+3|\leqslant|x-1-x-3|=4$,

所以 $8\leqslant2a^2-3a+4$,解得 $a\leqslant\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}$ 或 $a\geqslant\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}$,

所以 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{41}}{4},+\infty\right)$. …… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。