数学参考答案

一、选择题

1.B【解析】因为 $A=\{x|0\le x\le 2\}, B=\{x|0<x<4\}$，$C=\{0,\pm2,\pm4,\pm6,\cdots\}$，所以 $A\cup B=\{x|0\le x<4\}$，所以 $(A\cup B)\cap C=\{0,2\}$.

2.A【解析】因为 $y=\sqrt{2}\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{2})$，所以由函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象得到函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象，只需向左平移 4 个单位.

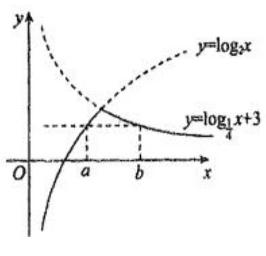
3.C【解析】因为 $y=f(x+1)$ 为偶函数，所以 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=-1$.又因为 $f(1)=0$，所以 $y=f(x)$ 的顶点坐标为 $(1,0)$.由 $f(x)=x^2-ax+b=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$，得 $\begin{cases}\frac{a}{2}=1,\\ f(1)=1-a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

4.C【解析】设公差为 d，由题意知 $\begin{cases}a_1+(a_1+d)^2=1,\\ a_3=a_1+2d=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=0,\\ d=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=-8,\\ d=5.\end{cases}$ 当 $a_1=0,d=1$ 时，$S_4=6$，当 $a_1=-8,d=5$ 时，$S_4=4\times(-8)+\frac{4\times3}{2}\times5=-2$.

5.D【解析】因为 $2\alpha-\frac{\pi}{3}=2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\pi$，所以 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\pi\right]=-\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\left[1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{3}$.

6.A【解析】由题图知函数的定义域为 R 且 $f(x)$ 为奇函数，所以排除 C,D 选项；B 选项中，$f'(x)=1+2\cos 2x$，则 $f'(0)=3$，不满足原点处切线斜率为 0，排除 B 选项；A 选项中，$f'(x)=1-\cos 2x$，则 $f'(0)=0$，符合题意.

7.B【解析】作出函数 $f(x)$ 的图象，如图中实线所示，由 $f(a)=f(b)$ 可知，$\log_2 a=\log_{\frac{1}{4}} b+3$，所以 $\log_2 a+\log_4 b=3$，即 $\log_2 a+\log_2\sqrt{b}=\log_2(a\sqrt{b})=3$，所以 $a\sqrt{b}=8$.



8.A【解析】由 $S_n=(-1)^n a_n-\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}^*$，当 $n=1$ 时，$S_1=-a_1-\frac{1}{2}$，得 $a_1=-\frac{1}{4}$；当 $n\ge2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(-1)^n a_n-\frac{1}{2^n}-(-1)^{n-1}a_{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}$，即 $a_n=(-1)^n a_n+(-1)^n a_{n-1}+\frac{1}{2^n}$.当 n 为偶数时，

$a_{n-1}=-\frac{1}{2^{n}}(n\geqslant 2)$，所以 $a_n=-\frac{1}{2^{n+1}}$，当 n 为奇数时，$a_{n-1}=-2a_n+\frac{1}{2^n}=(-2)\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$，所以 $a_n=\frac{1}{2^n}$，所以 $-a_1=\frac{1}{2^2},a_2=\frac{1}{2^2}$，所以 $-a_1+a_2=2\times\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2},-a_3=\frac{1}{2^3},a_4=\frac{1}{2^4}$，所以 $-a_3+a_4=2\times\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2^3}\cdots\cdots-a_{99}=\frac{1}{2^{100}},a_{100}=\frac{1}{2^{100}}$，所以 $-a_{99}+a_{100}=2\times\frac{1}{2^{100}}=\frac{1}{2^{99}}$．因为 $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{100}=\left(-a_1+a_2\right)+\left(-a_3+a_4\right)+\left(-a_5+a_6\right)+\cdots+\left(-a_{99}+a_{100}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{99}}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}\right)=$

$\frac{\frac{1}{2}\left(1\cdots\frac{1}{4^{50}}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)}{1-\frac{1}{2}}==\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{100}}-1\right)$.

二、选择题

9.ABD【解析】因为 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以 $d>0$.因为 $a_7=3a_5$，所以 $a_5+2d=3a_5$，所以 $d=a_5$，所以 $a_1=a_5-4d=-3d<0$，故 A，B 正确；又因为 $a_4=a_5-d=d-d=0$，所以 $S_3=S_4$，且为 S_n 的最小值，故 C 错误；又 $S_B=\frac{8\left(a_1+a_8\right)}{2}=4\left(a_4+a_5\right)=4a_5=4d>0,S_7=\frac{7\left(a_1+a_7\right)}{2}=7a_4=0$，故 D 正确

10.AB【解析】由题意得 $f(x)=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x+a\right|$ 与 $f(x)=\left|2^x+a\right|$ 在区间 $[1,2020]$ 上同增或同减.若同增，则 $\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x+a\leqslant 0,\\ 2^x+a\geqslant 0\end{cases}$ 在区间 $[1,2020]$ 上恒成立，即 $\begin{cases}a\leq\frac{1}{2},\\ a\geq -2,\end{cases}$ 所以 $-2\leqslant a\leqslant -\frac{1}{2}$.若同减，则 $\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x+a\geqslant 0,\\ 2^x+a\leqslant 0\end{cases}$ 在区间 $[1,2020]$ 上恒成立，即 $\begin{cases}a\geqslant -\left(\frac{1}{2}\right)^{2020},\\ a\leqslant -2^{2020},\end{cases}$ 无解，所以 A，B 选项符合题意.

11.AC【解析】由 $x=\frac{\pi}{8}$ 为 $f(x)$ 的一条对称轴，得 $\omega\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，即 $\omega=2+8k,k\in\mathbf{Z}$.又因为 $\omega\in\left(0,3\right]$，所以 $\omega=2$，所以 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\sqrt{5}\cos(2x+\varphi)\left(\tan\varphi=\frac{1}{3}\right)$.

易知 $\varphi\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，且 $\varphi\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故 A，C 错误，B，D 正确.

12.BC【解析】由题意得 $-\frac{\omega\pi}{6}+\varphi=0,\frac{7x\omega}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\omega=\frac{4}{3}\left(k+\frac{1}{2}\right)$.又 $f(x)$（在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上至少存在两个最大值或最小值，且在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}\right]$ 上具有单调性，则 $k=1$，此时 $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$，即

$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，因为$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{2\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，所以$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，故$A$错误；由$2\times\frac{59\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=20\pi$，所以$\left(\frac{59\pi}{6},0\right)$为$f\left(x\right)$图象的一个对称中心，故$B$正确；因为$-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以$-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}, f(x)_{\min}=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

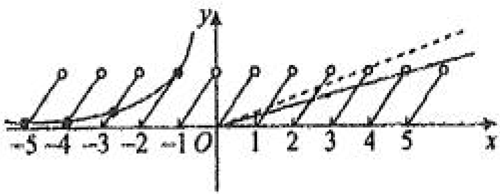
$=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}, f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，所以最大值与最小值之和为$\frac{1}{2}$，故$C$正确；将$f(x)$图象上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍，得到$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，再向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$的图象，即$g(x)=\cos x$，故$D$错误.综上，$B$，$C$正确.

三、填空题

13.-2【解析】当$n\geq 2$时；$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(a+b\cdot 2^n\right)-\left(a+b\cdot 2^{n-1}\right)=b\cdot 2^{n-1}$；当$n=1$时，$a_1=S_1=a+2b=b\cdot 2^0$，所以$a+b=0$①.又$a_2,9,a_5$成等差数列，所以$a_2+a_5=18$，即$2b+2^4\cdot b=18$②.由①②解得$a=-1,b=1$，所以$a-b=-2$.

14.2【解析】$f(x)=a\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{a^2+1}\sin(\omega x+\varphi)$，所以$f\left(x\right)$的最大值为$\sqrt{a^2+1}=2$，解得$a=\sqrt{3}$或$a=-\sqrt{3}$（舍去），所以$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，当$\omega x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$时，函数$f\left(x\right)$取得最大值，则当$x>0$时，前两个最大值分别为$k=0$和$k=1$.当$k=1$时，由$\omega x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi$，得$x=\frac{7\pi}{3\omega}\leqslant 7$，所以$\omega\geqslant\frac{\pi}{3}$，所以$\omega$的最小整数值为 2.

15.$\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right)$【解析】作出函数$f(x)$，$g(x)$的图象，如图所示.



方程$f\left(x\right)=g\left(x\right)$在区间[-5,0)上有 3 个实根，故在区间[0,5]上有 4 个不同实根.当直线$y=kx$经过点$\left(4,1\right)$时，$k=\frac{1}{4}$，经过点$\left(5,1\right)$时，$k=\frac{1}{5}$.若在区间[0,5]上有 4 个根，则$k\in\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right)$.

16.2　$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$　【解析】由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即$b^2-a^2=c^2-2ac\cos B$，所以$c^2-2ac\cdot\cos B=ac$，即$c-2a\cos B=a$.由正弦定理得$\sin C-2\sin A\cos B=\sin A$，即$\sin(A+B)-2\sin A\cos B=\sin A$，所以$\sin(B-A)=\sin A$，所以$B-A=A$或$(B-A)+A=\pi$（舍去），所以$B$=2$A$，即$\frac{B}{A}=2$.因为$A+B=3A\in(0,\pi)$，所以$A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以

$\frac{b\cos A}{a}+\frac{a}{b}=\frac{\sin B\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin 2A\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin 2A}=2\cos^2 A+\frac{1}{2\cos A}$．令 $x=\cos A$，则 $f(x)=2x^2+\frac{1}{2x},x\in\left(\frac{1}{2},1\right),f'(x)=4x-\frac{1}{2x^2}=\frac{8x^3-1}{2x^2}>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增。又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2},f(1)=\frac{5}{2}$，所以 $f(x)\in\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.

四、解答题

17.解：（1）由正弦定理得 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=2\sin B\cos B$，

得 $\sin B=2\sin B\cos B$.

因为 $0<B<\pi,\sin B\neq 0$，

所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{3}$.（5 分）

（2）在 ΔABC 中 AB=2，BC=3，$B=\frac{\pi}{3}$，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4+9-AC^2}{12}$，

解得 $AC=\sqrt{7}$.

在 ΔADC 中，$AC=\sqrt{7},AD=1$，A，B，C，D 在圆上，

因为 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{AD^2+DC^2\cdot-AC^2}{2AD\cdot DC}=\frac{1+DC^2-7}{2DC}$，

解得 DC=2，

所以四边形 $ABCD$ 的面积 $S=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

（10 分）

18.（1）证明：因为 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n,S_n^2=a_{n+1}^2-\lambda S_{n+1}$，

所以 $S_n^2=\left(S_{n+1}--S_n\right)^2-\lambda S_{n+1}$，

所以 $S_{n+1}\left(S_{n+1}-2S_n-\lambda\right)=0$.

因为 $a_n>0$，所以 $S_{n+1}>0$，

所以 $S_{n+1}-2S_n-\lambda=0$，

所以 $S_{n+1}=2S_n+\lambda$，（6 分）

（2）解：因为 $S_{n+1}=2S_n+\lambda$，

所以 $S_n=2S_{n-1}+\lambda(n\geqslant 2)$，

两式相减，得 $a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$

因为 $S_2=2S_1+\lambda$，即 $a_2+a_1=2a_1+\lambda$，

所以 $a_2=1+\lambda$，由 $a_2>0$，得 $\lambda>-1$.

若 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $a_1a_3=a_2^2$，

即 $2(\lambda+1)=(\lambda+1)^2$，解得 $\lambda=-1$.

经检验，$\lambda=1$ 符合题意，

故存在 $\lambda=1$，使得数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.（12 分）

19.解：若选择条件①

因为 $\dfrac{AN}{BN}=\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{AN}{BM}=2\sqrt{3}$

设 $BM=t$，则 $AN=2\sqrt{3}t$.

又 $B=60°,c=8$，

所以在 ΔABN 中，$AN^2=AB^2+BN^2-2AB\cdot BN\cos B$，

即 $(2\sqrt{3}t)^2=8^2+4t^2-2\times8\times2t\cos60°$，

即 $t^2+2t-8=0$，

解得 $t=2$ 或 -4（舍去）.（6 分）

在 ΔABM 中，$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cos B=8^2+4-2\times8\times2\cos60°=52$，

所以 $AM=2\sqrt{13}$，（8 分）

同理 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=8^2+6^2-2\times8\times6\cos60°=52$，

所以 $AC=2\sqrt{13}$.

由正弦定理可得 $2R=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{AC}{\sin60°}=\dfrac{2\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{39}}{3}$，

所以 ΔABC 外接圆的半径 $R=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$，（12 分）

若选择条件②

因为点 M，N 是 BC 边上的三等分点，且 $S_{\Delta AMN}=4\sqrt{3}$，所以 $S_{ADC}=12\sqrt{3}$.

因为 $B=60°$，所以 $S_{ABC}=12\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin60°=\dfrac{1}{2}\times8\times BC\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $BC=6$，所以 $BM=2$.（6 分）

在 ΔABM 中，$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cos B=8^2+4-2\times8\times2\sin60°=52$，

所以 $AM=2\sqrt{13}$.（8 分）

同理 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=8^2+6^2-2\times8\times6\cos60°=52$，

所以 $AC=2\sqrt{13}$，

由正弦定理可得 $2R=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{AC}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{39}}{3}$，

所以 ΔABC 外接圆的半径 $R=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$.（12 分）

若选择条件③

设 $BM=t$，则 $BC=3t$.

在 ΔABM 中，$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cos B=8^2+t^2-2\times 8t\cos 60^\circ=8^2+t^2-8t$，

同理在 ΔABC 中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=8^2+9t^2-2\times 8\times 3t\cos 60^\circ=64+9t^2-24t$，

因为 $AC=AM$，所以 $8^2+t^2-8t=64+9t^2-24t$，

所以 $t=2$（6 分）

在 ΔABM 中，$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cos B=8^2+4-2\times 8\times 2\cos 60^\circ=52$，

所以 $AM=2\sqrt{13}$.（8 分）

同理 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=8^2+6^2-2\times 8\times 6\cos 60^\circ=52$，

所以 $AC=2\sqrt{13}$.

由正弦定理可得 $2R=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{AC}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{39}}{3}$，

所以 ΔABC 外接圆的半径 $R=\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$.（12 分）

20.解：（1）$f'(x)=3x^2-6x+a=3(x-1)^2+a-3$，（1 分）

当 $a\ge 3$ 时，$f'(x)\ge 0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间；（2 分）

当 $a<3$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x<1-\sqrt{\dfrac{3-a}{3}}$ 或 $x>1+\sqrt{\dfrac{3-a}{3}}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,1-\sqrt{\dfrac{3-a}{3}}\right)$ 和 $\left(1+\sqrt{\dfrac{3-a}{3}},+\infty\right)$

令 $f'(x)<0$，得 $1-\sqrt{\dfrac{3-a}{3}}<x<1+\sqrt{\dfrac{3-a}{3}}$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(1-\sqrt{\dfrac{3-a}{3}},1+\sqrt{\dfrac{3-a}{3}}\right)$.（4 分）

综上，当 $a\ge 3$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间；当 $a<3$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,1-\sqrt{\dfrac{3-a}{3}}\right)$ 和 $\left(1+\sqrt{\dfrac{3-a}{3}},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(1-\sqrt{\dfrac{3-a}{3}},1+\sqrt{\dfrac{3-a}{3}}\right)$.（5 分）

（2）由题意得 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}ax^3+\dfrac{3}{2}(a-1)x^2-3x+\dfrac{3}{2}a^2,x\in[0,2]$.

因为函数 $\varphi\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处取得最大值，

所以 $\varphi(0)=\dfrac{3}{2}a^{2}\geq\varphi(x)=\dfrac{1}{2}ax^{3}+\dfrac{3}{2}(a-1)x^{2}-3x+\dfrac{3}{2}a^{2},x\in[0,2]$，

即 $\dfrac{1}{2}ax^{3}+\dfrac{3}{2}(a+1)x^{2}-3x\leq 0,x\in[0,2]$，

当 $x=0$ 时，显然成立.（7 分）

当 $x\in(0,2]$ 时，得 $\dfrac{1}{2}ax^{2}+\dfrac{3}{2}(a-1)x-3\leq 0$，

即 $a\leq\dfrac{3(x+2)}{x^{2}+3x}=\dfrac{3(x+2)}{(x+2)^{2}-(x+2)-2}=\dfrac{3}{(x+2)-\dfrac{2}{x+2}-1}$.（8 分）

令 $h(x)=(x+2)-\dfrac{2}{x+2}-1,x\in(0,2]$.

易知 $h(x)$ 在区间 $\left(0,2\right]$ 上单调递增，故 $h(x)\in\left(0,-\dfrac{5}{2}\right]$，

所以 $\dfrac{3}{(x+2)-\dfrac{2}{x+2}-1}\geq\dfrac{6}{5}$，即 $a\leq\dfrac{6}{5}$，

所以 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{6}{5}\right]$.（12 分）

21.（1）解：补充的条件为 $q=-\dfrac{1}{2}$，

S_1,S_2,S_3 的关系为 S_1,S_3,S_2 成等差数列.

证明如下：

由题意可得 $S_1=a_1$，

$S_2=a_1+a_2=a_1-\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2}a_1$，

$S_3=a_1+a_2+a_3=a_1-\dfrac{1}{2}a_1+\dfrac{1}{4}a_1=\dfrac{3}{4}a_1$，

可得 $S_1+S_2=2S_3$，因此 S_1,S_3,S_2 成等差数列.（5 分）

（2）证明：由 $a_1-a_3=3$，可得 $a_1-\dfrac{1}{4}a_1=3$，

解得 $a_1=4,a_n=4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$（6 分）

$b_n=\dfrac{n}{12}\left|a_n\right|=\dfrac{n}{12}\left|4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n}{2^{n}}$，（7 分）

则 $T_n=\dfrac{2}{3}\left(1\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{4}+3\cdot\dfrac{1}{8}+\cdots+n\cdot\dfrac{1}{2^{n}}\right)$，

$\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{3}\left(1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{16}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\right)$，

上面两式相减

可得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{2}{3}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\right]$．（9 分）

整理可得 $T_n=\frac{2}{3}\left(2-\frac{n+2}{2^n}\right)=\frac{4}{3}\left(1-\frac{n+2}{2^{n+1}}\right)$，（11 分）

因为 $n\in N^*,1-\frac{n+2}{2^{n+1}}<1$，所以 $T_n<\frac{4}{3}$．（12 分）

22.解：（1）由 $r(x)=e^x\cdot-x+1$，可得 $r'(x)=e^x-1$，

则 $r'(x)\cdot\frac{x}{r(x)}=\left(e^x-1\right)\cdot\frac{x}{e^x-x+1}$，

令 $r'(x)\cdot\frac{x}{r(x)}=\left(e^x-1\right)\cdot\frac{x}{e^x-x+1}=0$，

解得 $x=0$，所以 $r(x)$ 弹性函数的零点为 $x=0$．（3 分）

（2）（ⅰ）当 $t=0$ 时，函数 $f(x)=(x-1)e^x+\ln x$，可得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

则 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x+\frac{1}{x}=\frac{x^2e^x+1}{x}$，

所以 $f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}=\frac{x^2e^x+1}{(x-1)e^x+\ln x}>1$，此不等式等价于下面两个不等式组：

（Ⅰ）$\begin{cases}(x-1)e^x+\ln x>0 & ①,\\ x^2e^x+1>(x-1)e^x+\ln x & ②,\end{cases}$

或（Ⅱ）$\begin{cases}(x-1)e^x+\ln x<0 & ③,\\ x^2e^x+1<(x-1)e^x+\ln x & ④,\end{cases}$

因为 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在定义域上单调递增.

又由 $f(1)=0$，所以①的解为 $x>1$；

②中，令 $g(x)=x^2c^2+1-\left[(x-1)e^x+\ln x\right]=\left(x^2-x+1\right)e^x+1-\ln x>0$，

且 $g'(x)=(2x-1)e^x+\left(x^2-x+1\right)e^x-\frac{1}{x}=\frac{\left(x^3+x^2\right)e^x-1}{x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒为正，

则 $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g(1)>0$，

故②在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立

所以不等式组（Ⅰ）的解为 $x>1$.

同①的解法，求得③的解为 $0<x<1$；

因为当 $0<x<1$ 时，④中 $x^2\mathrm{e}^x+1>0,(x-1)\mathrm{e}^x+\ln x<0$，所以不成立，

所以不等式组（Ⅱ）无实数解，

综上，函数 $f(x)$ 的弹性区间 $D=(1,+\infty)$，（8 分）

（Ⅱ）由 $f(x)>1$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

可得 $t<\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x+\dfrac{\ln x-1}{x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

设 $h(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x+\dfrac{\ln x-1}{x}$，

则 $h'(x)=\dfrac{\left(x^2-x+1\right)e^x+2-\ln x}{x^2}$，

而 $\left(x^2-x+1\right)\mathrm{e}^x+2-\ln x=g(x)+1$，

由（Ⅰ）可知，$g\left(x\right)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒为正，

所以 $h'\left(x\right)>0$，函数 $h\left(x\right)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

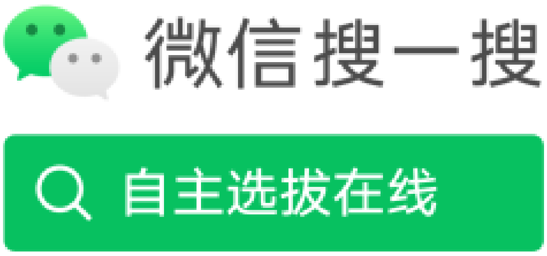
所以 $h\left(x\right)>h\left(1\right)=-1$，

所以 $t\le-1$，即实数 t 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》