哈尔滨市第六中学2020级高三第一次模拟考试

数学试卷

考试说明：本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，满分150分，

考试时间120分钟.

（1）答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚；

（2)选择题必须使用2B铅笔填涂，非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整，字迹清楚；

（3）请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在草稿纸、试题卷上答题无效；

（4）保持卡面清洁，不得折叠、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、刮纸刀.

参考公式：

样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的标准差 $s=\sqrt{\frac{1}{n}\left[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\right]}$，其中 $\bar{x}$ 为样本的平均数；柱体体积公式 $V=Sh$，其中 S 为底面面积，h 为高；锥体体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 为底面面积，h 为高；球的表面积和体积公式 $S=4\pi R^2$，$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中 R 为球的半径

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求.）

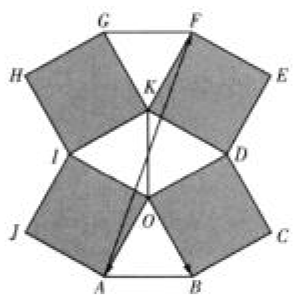
1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x^2+x\le 2\},B=\{1,a\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值集合为（　　）

A. $\{-2,-1,0\}$　　B. $\{x\,|-2\le x\le 1\}$　　C. $\{x\,|-2\le x<1\}$　　D. $\{-2,-1,0,1\}$

2. 已知复数 $z+2i=\frac{1}{1-i}$，则 $\left|\bar{z}\cdot(1+3i)\right|$ 值为（　　）

A. $\sqrt{10}$　　B. 10　　C. $3\sqrt{5}$　　D. 5

3．地砖是一种地面装饰材料，也叫地板砖，用黏土烧制而成，质坚、耐压、耐磨、防潮．地板砖品种非常多，图案也多种多样．如图是某公司大厅的地板砖铺设方式，地板砖有正方形与正三角形两种形状，且它们的边长都相同，若 $\overrightarrow{OD}=\vec{m},\overrightarrow{OI}=\vec{n}$,，则 $\overrightarrow{AF}=$（　　）



A. $(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1)\vec{m}+(\frac{4\sqrt{3}}{3}+1)\vec{n}$　　B. $(\frac{4\sqrt{3}}{3}+1)\vec{m}+(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1)\vec{n}$

C. $(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1)\vec{m}+(\frac{4\sqrt{3}}{3}-1)\vec{n}$　　D. $(\frac{4\sqrt{3}}{3}+1)\vec{m}+(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1)\vec{n}$

4. 已知圆心均在 y 轴上的两圆外切，半径分别为 $r_1,r_2(r_1<r_2)$，$\frac{r_2}{r_1}=2$，则两圆公切线的斜率为（　　）

A. $\pm 2\sqrt{2}$　　B. $\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $\pm\frac{1}{3}$

5. 在一个长度为 n 的数字序列中，当且仅当相邻元素差的绝对值经过排序后正好是从1到 $(n-1)$，则认定该数字序列存在"有趣的跳跃".如果一组数经过排序后存在"有趣的跳跃"，则称这组数为"有趣的跳跃数组".例如，因为1,3,2差的绝对值分别为2，1，所以1,3,2存在"有趣的跳跃"，1,2,3这组数为"有趣的跳跃数组".现从 $1,2,3,\cdots,6,7$ 这七个数中一次任取3个数，则这3个数是"有趣的跳跃数组"的概率为（　　）

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{2}{7}$　　C. $\frac{12}{35}$　　D. $\frac{13}{35}$

6. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，P 为椭圆第一象限上的点，PF_1 的延长线交椭圆于另一个点 Q，$\overrightarrow{PF_1}=2\overrightarrow{F_1Q}$，且 $PF_2\perp F_1F_2$，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

7. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的最小正周期为 π，函数 $f(x)$ 图象关于点 $(-\frac{\pi}{12},0)$ 对称，且满足函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增，则 $\varphi=$（　　）

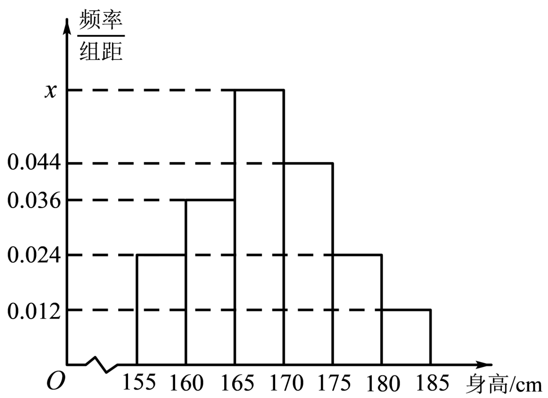
A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $-\frac{\pi}{3}$　　C. $-\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

8. 若$3^{a}+\log_{3}a=9^{b}+3\log_{27}b$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a>2b$　　B. $a<2b$　　C. $a>b^{2}$　　D. $a<b^{2}$

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对得5分，有错选得0分，部分选对得2分.）

9. 从某校男生中随机抽取100人测量他们的身高，发现他们的身高都在155～185cm之间，将统计得到的原始数据进行分组，得到如图所示的频率分布直方图（每组均为左闭右开区间）（　　）



A. 已知该校一共有1500名男生，该校身高在［165，170）内的男生人数约为450人

B. 该校男生身高的90%分位数约为178.3 （结果精确到0.1）

C. 将身高不低于170cm的男生称为“高个子”，低于170cm的男生称为“非高个子”．已知在原始数据中，高个子男生的身高的平均数为177，方差为10，所有这100名男生的身高的平均数为168，方差为64，则非高个子男生的身高的方差为10

D. 据此估计该校男生的平均身高一定是168.6

10. 已知F是抛物线$y^{2}=2px$（$p>0$）的焦点，过F的直线交抛物线于A,B两点，以线段AB为直径的圆交y轴于M,N两点，交准线l于Q点，则下列说法正确的是（　　）

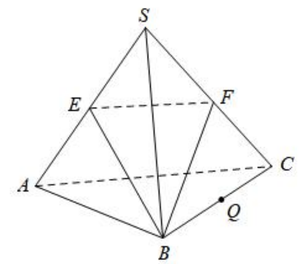
A. 以AF为直径的圆与y轴相切

B. 若抛物线上的点$T(1,t)$到F的距离为2，则抛物线的方程为$y^{2}=2x$

C. $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$

D. $|MN|$的最小值为$2p$

11. 如图，三棱锥$S-ABC$中，平面$SAC\perp$平面ABC，过点B且与AC平行的平面α分别与棱SA、SC交于E,F，Q为线段BC上的动点，若$SA=SC=BA=BC=2,AC=2\sqrt{2}$，则下列结论正确的是（　　）



A. $AC\,//\,EF$

B. 若E,F分别为SA，SC的中点，则四棱锥$B-AEFC$的体积为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. 线段EQ的最小值为$\sqrt{2}$

D. 若E,F分别为SA，SC的中点，则BF与SA所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

12. 已知函数$f(x)$的定义域$(-1,1)$，满足$f(x)+f(y)=f(\dfrac{x+y}{1+xy})$，且$f(\dfrac{1}{2})=1$．当$x<0$时，$f(x)<0$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(x)$是定义在$(-1,1)$上的偶函数

B. $f(x)$在$(-1,1)$上单调递增

C. 若$a_{1}=\dfrac{1}{2},a_{n+1}=\dfrac{2a_{n}}{1+a_{n}^{2}}$，则$f(a_{n})=2^{n-1}$

D. 当A,B是钝角ΔABC的两个锐角时，$f(\sin A)>f(\cos B)$

第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．将答案填在机读卡上相应的位置．）

13. $(\frac{y}{x}-1)(2x+y)^5$ 的展开式中，x^2y^3 的系数为______．（用数字作答）

14. 设 P,A,B,C,D 是表面积为 16π 的球的球面上五个点，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且四边形 $ABCD$ 为正方形，则四棱锥 $P-ABCD$ 体积的最大值为_______.

15. 若过点 $(m,0)$ 的任意一条直线都不与曲线 $C:y=x(\ln x-1)$ 相切，则实数 m 的取值范围是_______.

16. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_7$ 表示从左到右依次排列的 7 盏灯, 现制定开灯与关灯的规则如下:

(1) 对一盏灯进行开灯或关灯一次叫做一次操作;

(2) 灯 a_1 在任何情况下都可以进行一次操作；对任意的 $i\in\{x\in N\mid 2\le x\le 7\}$，要求灯 a_i 的左边有且只有灯 a_{i-1} 是开灯状态时才可以对灯 a_i 进行一次操作. 如果所有灯都处于开灯状态, 那么要把灯 a_3 关闭最少需要_____次操作；如果除灯 a_5 外, 其余 6 盏灯都处于开灯状态, 那么要使所有的灯都处于开灯状态，最少需要_____次操作.

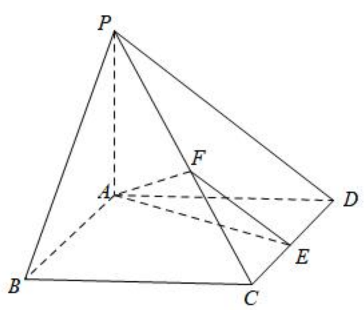
四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．）

17.（本小题满分 10 分）

四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$PA\perp$ 面 $ABCD$，$\angle BAD=120^\circ$，过点 A 且与 PD 平行的平面 α 与 CD,PC 分别交于 E,F 两点.

（Ⅰ）证明：$PD/\!/EF$；

（Ⅱ）若 E 为 CD 中点，且 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°，求二面角 $A-EF-D$ 的正弦值.



18.（本小题满分 12 分）

设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $S_n+S_{n-1}=a_n^2\ (n\ge 2,n\in N^*)$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（Ⅱ）设 $b_n=\frac{a_1}{2^n}+\frac{a_2}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^2}+\frac{a_n}{2}$，若数列 $\{b_n-\lambda n+1\}$ 为等比数列，求实数 λ 的值.

19.（本小题满分 12 分）

在锐角 ΔABC 中，设边 a,b,c 所对的角分别为 A,B,C，且 $a^2-b^2=bc$.

（Ⅰ）求角 B 的取值范围;

（Ⅱ）若 $c=4$，求 ΔABC 中 AB 边上的高 h 的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

非物质文化遗产是一个国家和民族历史文化成就的重要标志，是优秀传统文化的重要组成部分．1993 年，黑龙江省海伦市被国家命名为“中国民间艺术—剪纸之乡”称号．海伦剪纸是黑龙江省海伦的东方红、护林、双录、伦河、海兴、海北、长发等地的剪纸。特点是画幅较大，风格粗犷，刀锋稚拙而有力，是一种传统的民间艺术．为了弘扬中国优秀的传统文化，某校将举办一次剪纸比赛，共进行 4 轮比赛，每轮比赛结果互不影响．比赛规则如下：每一轮比赛中，参赛者在 30 分钟内完成规定作品和创意作品各 2 幅，若有不少于 3 幅作品入选，将获得“巧手奖”．4 轮比赛中，至少获得 3 次“巧手奖”的同学将进入决赛．某同学经历多次模拟训练，指导老师从训练作品中随机抽取规定作品和创意作品各 4 幅，其中有 3 幅规定作品和 2 幅创意作品符合入选标准．

（Ⅰ）从这 8 幅训练作品中，随机抽取规定作品和创意作品各 2 幅，试预测该同学在一轮比赛中获得“巧手奖”的概率；

（Ⅱ）以上述两类作品各自入选的频率作为该同学参赛时每幅作品入选的概率．经指导老师对该同学进行赛前强化训练，规定作品和创意作品入选的概率共提高了 $\frac{1}{4}$（两类作品的概率均有提高），以获得“巧手奖”的次数的数学期望为参考，试预测该同学能否进入决赛？

21.（本小题满分 12 分）

已知直线 l_1：$y=x$ 和直线 l_2：$y=-x$，过动点 $E(x_0,y_0)$ 作平行 l_2 的直线交 l_1 于点 A，过动点 E 作平行 l_1 的直线交 l_2 于点 B，且四边形 $OAEB$（O 为原点）的面积为 1.

（Ⅰ）求动点 E 的轨迹方程；

（Ⅱ）当动点 E 的轨迹的焦点在 x 轴上时，记动点 E 的轨迹为曲线 E_0，若过 $(-2,0)$ 的直线 l 与曲线 E_0 交于 P,Q 两点，在曲线 E_0 上是否存在点 H，使 ΔPQH 的重心为原点 O.若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}m(x-1)^2-2x+\ln x, m\ge 1$.

（Ⅰ）求证：函数 $f(x)$ 存在单调递减区间，并求出单调递减区间 (a,b) 的长度 $b-a$ 的取值范围；

（Ⅱ）当 $x\ge 1$ 时，$f(x)\le xe^{x-1}-3x$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.