

中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 9 月测试

数学试卷 (A 卷)

本试卷共 150 分, 考试时间 90 分钟。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $i\bar{z} = 1+i$ (其中 i 为虚数单位), 则 $z =$

A. $1+i$

B. $1-i$

C. $-1+i$

D. $-1-i$

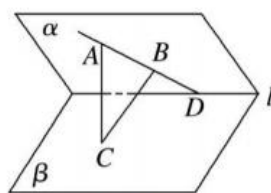
2. 平面 α 与平面 β 相交于直线 l , 点 A, B 在平面 α 上, 点 C 在平面 β 上但不在直线 l 上, 直线 AB 与直线 l 相交于点 D . 设 A, B, C 三点确定的平面为 γ , 则 β 与 γ 的交线是

A. 直线 AC

B. 直线 AB

C. 直线 CD

D. 直线 BC



(第 2 题图)

3. 在 $\triangle ABC$ 中, “对任意 $t \in \mathbf{R}$, 均有 $|\overrightarrow{AB} - t\overrightarrow{AC}| \geq |\overrightarrow{BC}|$ ” 是 “ $\triangle ABC$ 为直角三角形” 的

A. 充分必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 了解某些细菌、病毒的生存条件、繁殖习性等对于预防该细菌、病毒引起的疾病传播有重要的意义。科研团队在培养基中放入一定量某种菌落进行研究, 设经过时间 x (单位: min), 菌落的覆盖面积为 y (单位: mm^2)。团队提出如下假设: ① $x \geq 0, y \geq 0$; ② y 随 x 的增加而增加, 且增加的速度越来越快。则下列选项中, 符合团队假设的模型是

A. $y = ka^x (k > 0, a > 1)$

B. $y = \log_b x + c (b > 1, c > 0)$

C. $y = kx + b (k > 0, b > 0)$

D. $y = p\sqrt{x} + q (p > 0, q > 0)$

5. 八角星纹是大汶口文化中期彩陶纹样中具有鲜明特色的花纹。八角星纹可以抽象成图 2 所示的八角形, 图中最小的三角形均为全等的等腰直角三角形, 中间的四边形为正方形。在图 2 基础上连接线段 AC, BD , 记 $\angle CAB = \alpha, \angle DBA = \beta$, 如图 3 所示, 则 $\alpha + \beta =$

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 75°



图1

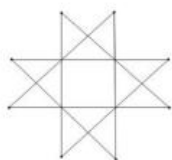


图2

(第5题图)

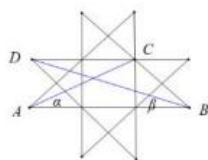


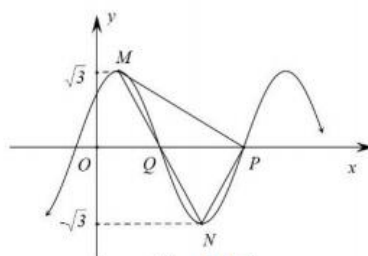
图3

6. 本·福特定律是指：在一组没有人为编造的数据中，首位非零数字为 $1, 2, 3, \dots, 9$ ，这九个事件不是等可能的．具体来说，随机变量 X 是一组没有人为编造的首位非零数字， $P(X=k) = \lg \frac{k+1}{k} (k=1, 2, 3, \dots, 9)$ ．设 $a = \log_2 3$ ，则根据本·福特定律，首位非零数字是1的概率与首位非零数字是8的概率之比为

- A. $\frac{1}{2a+3}$ B. $\frac{1}{2a-3}$ C. $\frac{a}{2+3a}$ D. $\frac{a}{2-3a}$

7. 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 的部分图象如图所示， P, Q 为图象与 x 轴交点， M, N 为图象的最高点和最低点，若 $MP \perp NP$ ，则 $\omega =$

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$



(第7题图)

8. 下列选项中可以确定长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 体积的一组量是

- A. AB_1, AC, DD_1 的长度 B. AC, BD_1, A_1C 的长度
C. BC_1, A_1D, B_1D 的长度 D. A_1C, DB, CC_1 的长度

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得5分，部分选对但不全得3分，有错选的得0分。

9. 小明在录入100户居民用水量时，错把7.7录成了77，则下列统计量中不一定发生变化的是
- A. 中位数 B. 平均数 C. 方差 D. 极差
10. 已知 x, y, z 是空间的直线或平面，要使命题“若 $x \perp z, y \perp z$ ，则 $x \parallel y$ ”为真命题，则 x, y, z 可以是
- A. x, y, z 是三个不同的平面 B. x, y 是两个不同的平面， z 是直线
C. x, y, z 是三条不同的直线 D. x, y 是两条不同的直线， z 是平面

11. 若实数 x, y 满足: $x^2 + y^2 = xy + 1$, 则下列不等式恒成立的是

- A. $xy \geq 1$ B. $x + y \geq 2$
B. $xy \leq 1$ D. $x + y \leq 2$

12. 已知 n 为正整数, 集合 $A = \left\{ \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \mid k \in \mathbf{N}, 0 \leq k \leq n \right\}$, 若集合 A 恰有 8 个子集, 则 n 可以为

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a=1, b=3, C=60^\circ$, 则 $c=$ _____.

14. 斗是我国古代量米用的量具, 其形状大多为棱台. 图中所示的斗可抽象为上、下底面均为正方形的棱台, 设该棱台的上底边长为 30cm, 下底边长为 40cm, 高为 30cm, 则该斗装满米, 可装 _____ 升米. (1 升等于 1000cm^3)



(第 14 题图)

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 在边 BC 所在直线上, 若 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 且 $x > 0, y > 0$, 则 $\frac{1}{4x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 _____.

16. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < a \\ x^2 - x - 1, & x \geq a \end{cases}$, $g(x) = \lg x$. 若对任意实数 $x_1 > 0$, 总存在实数 x_2 , 使得 $f(x_2) = g(x_1)$, 则实数 a 的取值范围为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 为了鼓励消费, 某地发放了以“爱购**”为主题的消费券, 消费券价值 50 元, 使用方式为: 消费满 100 元, 结账时该券抵 50 元.

(1) A 商家在中秋节期间举行促销活动, 每件商品按原价 6 折销售. 若买一件原价为 300 元的商品, 则在结账时使用消费券后, 还应付多少元?

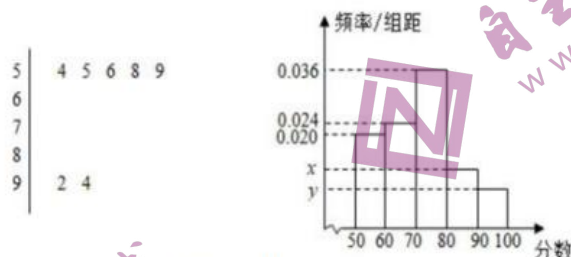
(2) 你在 B 商家选购时看中了一件 88 元的商品和一件打 5 折的特价商品, 但特价商品的折扣不能与消费券同时使用. 若该特价商品原价的范围在 $(100, 150)$ 元, 请问, 你是否会使用消费券?

18. (12 分) 在复平面内复数 z_1, z_2 所对应的点为 Z_1, Z_2 , O 为坐标原点, i 是虚数单位.

(1) $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 2 - i$, 计算 $z_1 \cdot z_2$ 与 $\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2}$;

(2) 设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$, 求证: $|\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2}| \leq |z_1 \cdot z_2|$, 并指出 $\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2}$ 满足什么条件时该不等式取等号.

19. (12分) 某班一次数学测试成绩的茎叶图(图中仅列出 $[50, 60), [90, 100)$ 的数据)和频率分布直方图, 如图所示:



(第19题图)

(1) 求 x 和 y 的值;

(2) 求班级人数、平均成绩和第75百分位数.

20. (12分) 掷黑、白两枚骰子, 设事件 A 为: 两枚骰子的点数和为7; 事件 B 为: 白色骰子的点数是1; 事件 C 为: 黑色骰子的点数是1.

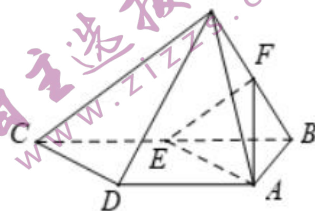
(1) 判断事件 A 和事件 B 是否独立, 并说明理由;

(2) 设事件 D 为: 两枚骰子中至少有一枚的点数是1且两枚骰子点数之和不是7. 用事件 A, B, C 表示事件 D , 并求 $P(D)$.

21. (12分) 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC, AB \perp BC, AB = AD, BC = 2AB$, E, F 分别为棱 BC, BP 中点.

(1) 求证: 平面 $AEF \parallel$ 平面 DCP ;

(2) 若平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$, 直线 AP 与平面 PBC 所成的角为 45° , 且 $CP \perp PB$, 求二面角 $P-AB-D$ 的大小.



(第21题图)

22. (12分) 已知函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图象均为一条连续不断的曲线, 且满足: 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq |g(x_1) - g(x_2)|$.

(1) 若 $f(x) = x^2$, 求证: $y = g(x)$ 是偶函数;

(2) 若 $y = g(x)$ 为减函数, 且 $f(0) < f(1)$, 求证: $y = f(x)$ 是 $(0, 1)$ 上的增函数.

中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 9 月测试

数学 (A 卷) 参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
A	C	C	A	B	B	D	A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对但不全的得 3 分，有错选的得 0 分。

9	10	11	12
ACD	BD	CD	BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\sqrt{7}$ 14. 37 15. $\frac{9}{8}$ 16. $\left[-\frac{13}{4}, 3\right]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

解：(1) 300 元 6 折后应付 180 元，使用消费券后还应付 130 元 4 分

(2) 设该特价商品的原价为 x 元，
不使用消费券应付 $88 + 0.5x$ ，
使用消费券应付 $88 + x - 50 = 38 + x$ 2 分

$(88 + 0.5x) - (38 + x) = 50 - 0.5x < 0$ 等价于 $x > 100$ 4 分

$\therefore x \in (100, 150)$ ，所以不使用消费券 6 分

18. (12 分)

解：(1) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (2 - i) = 8 + i$ 2 分

$\overrightarrow{OZ_1} = (3, 2), \overrightarrow{OZ_2} = (2, -1),$

$\therefore \overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2} = 4$ 4 分

证明：(2) $\overrightarrow{OZ_1} = (a, b), \overrightarrow{OZ_2} = (c, d),$

$\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2} = ac + bd, |\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2}|^2 = (ac + bd)^2$ 3 分

$|z_1 \cdot z_2|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2,$

$$|z_1 \cdot z_2|^2 - |\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2}|^2 = (ad - bc)^2 \geq 0,$$

$$\therefore |\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2}| \leq |z_1 \cdot z_2| \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{当 } ad = bc \text{ 时取 “=” , 此时 } \overrightarrow{OZ_1} \parallel \overrightarrow{OZ_2} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

19. (12 分)

$$\text{解: (1) 由茎叶图和直方图得 } \frac{y}{0.020} = \frac{2}{5}, \therefore y = 0.008 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由直方图得 } (0.036 + 0.024 + 0.020 + x + y) \times 10 = 1,$$

$$\text{得 } x + y = 0.020, x = 0.012 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 区间 $[50, 60)$ 上的频率为 0.20, 频数为 5,

$$\text{所以学生数为 } \frac{5}{0.20} = 25 \text{ 人} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

用区间中点估算区间平均值, 估算班级平均成绩为:

$$\bar{x} = 0.20 \times 55 + 0.24 \times 65 + 0.36 \times 75 + 0.12 \times 85 + 0.08 \times 95 = 71.4 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

设第 75 百分位数为 a , 则 a 落在区间 $[70, 80)$ 上 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(0.020 + 0.024) \times 10 + 0.036 \times (a - 70) = 0.75,$$

$$\therefore a = 78.6 \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

20. (12 分)

$$\text{解: (1) } P(A) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{36} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

所以事件 A 和事件 B 相互独立 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) D = \bar{A} \cap (B \cup C) \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

事件 D 所含基本事件为: $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 1)$ 共 9

$$\text{个, } \therefore P(D) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

21. (12 分)

证明: (1) 由已知 $CE \parallel DA$, 且 $CE = DA$,

$\therefore ADCE$ 为平行四边形, $AE \parallel DC$ 1 分

$\because AE \not\subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD ,

$\therefore AE \parallel$ 平面 PCD ,

$\because E, F$ 分别为棱 BC, BP 中点,

$\therefore EF \parallel CP$ 2 分

又 $\because EF \not\subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD , $\therefore EF \parallel$ 平面 PCD ,

$\because AE \cap EF = E$,

所以平面 $AEF \parallel$ 平面 DCP 4 分

解: (2) 因为平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AB \perp BC$, $\therefore AB \perp$ 平面 PBC 2 分

$\therefore \angle APB$ 即是直线 AP 与平面 PBC 所成的角, 即 $\angle APB = 45^\circ$ 4 分

$\because AB \perp$ 平面 PBC , $\therefore AB \perp PB$,

又 $\because AB \perp BC$, $\therefore \angle PBC$ 即是二面角 $P-AB-D$ 的平面角 6 分

$\because CP \perp PB$, $\therefore \cos \angle PBC = \frac{PB}{BC}$,

$\because \angle APB = 45^\circ, AB \perp PB$, $\therefore AB = PB$,

$\therefore \cos \angle PBC = \frac{PB}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$,

得 $\angle PBC = 60^\circ$, 即二面角 $P-AB-D$ 的大小为 60° 8 分

22. (12 分)

证明: (1) $\because |f(x) - f(-x)| \geq |g(x) - g(-x)|$,

$\therefore |g(x) - g(-x)| \leq |x^2 - (-x)^2| = 0$ 2 分

得 $g(-x) = g(x)$, $\therefore y = g(x)$ 为偶函数 4 分

(2) 设 $x_1 < x_2$, $\because y = g(x)$ 是减函数, $\therefore g(x_1) > g(x_2)$,

$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| \geq |g(x_1) - g(x_2)|$, $\therefore |f(x_1) - f(x_2)| > 0$

所以对任意 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ (*) 2 分

① 首先证明, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(0) < f(x) < f(1)$,

假设存在 $0 < x_0 < 1$, 且 $f(1) < f(x_0)$,

设 $h(x) = f(x) - f(1)$, 则 $h(0) < 0, h(x_0) > 0$,

所以存在 $x_3 \in (0, x_0)$, 使得 $h(x_3) = 0$,

得 $f(x_3) = f(1)$, 与结论*矛盾,

所以不存在 $0 < x_0 < 1$, 使得 $f(1) < f(x_0)$,

同理也不存在 $0 < x_0 < 1$, 使得 $f(x_0) < f(0)$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $f(0) < f(x) < f(1)$ 5 分

②再证明, 当 $0 < x_1 < x_2 < 1$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$,

假设存在 $0 < x_1 < x_2 < 1$ 时, 使得 $f(x_1) > f(x_2)$,

则 $f(0) < f(x_2) < f(x_1) < f(1)$,

设 $h(x) = f(x) - f(x_2)$, 则 $h(0) < 0, h(x_1) > 0$,

所以存在 $x_3 \in (0, x_0)$, 使得 $h(x_3) = 0$,

得 $f(x_3) = f(x_2)$, 与结论*矛盾,

所以假设不成立, 即对任意 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以函数 $y = f(x)$ 是区间 $(0, 1)$ 上的增函数 8 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线