南宁市2023届高中毕业班第二次适应性测试参考答案

理科数学

一、选择题

1.C；2.B；3.B；4.B； 5. D； 6.C； 7.A；8. D ；9. A；10.D；11.A；12. D

【12.详解】因为 $2\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos 2\in(-1,0)$，所以 $\cos(\cos 2)>0,\sin(\cos 2)<0$，

可得 $a<b$.构造函数 $f(x)=\sin x-x$，则 $f'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 在R上单调递减，当 $x<0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，所以 $\sin x>x$，可知 $\sin(\cos 2)>\cos 2$，即 $a>\cos 2$，

又 $\cos 2=2\cos^2 1-1$，$c-\cos 2=\ln(\cos 1)-2\cos^2 1+1$，又 $1\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.所以 $\cos 1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

设函数 $g(x)=\ln x-2x^2+1$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-4x=\frac{1-4x^2}{x}$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，则 $g(x)<g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=-\ln 2+\frac{1}{2}<0$，可知 $\ln(\cos 1)-2\cos^2 1+1<0$，所以 $c<\cos 2$.综上，$c<a<b$.

二、填空题

13.【答案】4　　14.【答案】$x+2y+8=0$ 或 $x+2y-2=0$（至少正确写出一个方程）　　15.【答案】$\frac{112\pi}{9}$.　　16.【答案】228

【16.详解】当 $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，有 $\frac{1}{1+2x}=1-2x+4x^2-\cdots+(-2x)^n+\cdots$，

$\frac{1}{1-x^3}=1+\left(x^3\right)^1+\left(x^3\right)^2+\cdots+\left(x^3\right)^n+$，则 $\frac{x}{(1-x^3)(1+2x)}=x\left[1+x^3+x^6+\cdots+x^{3n}+\cdots\right]\times$

$\left[1-2x+4x^2+\cdots+(-2x)^n+\cdots\right]$，则 a_9 为 $\frac{x}{\left(1-x^3\right)(1+2x)}$ 展开式中 x^9 的系数，

$x\left[1\cdot(-2x)^8+x^3\cdot(-2x)^5+x^6\cdot(-2x)^2\right]=228x^9$，$\therefore a_9=228$.

三、解答题

17.记S_n为各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前n项和，$S_3=7$且$a_3,3a_2,a_4$成等差数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=a_n\log_2 a_{n+1}^2$，求$\{b_n\}$的前n项和T_n.

解:(1)设数列$\{a_n\}$的首项为a,公比为q,

则$S_3=a_1+a_2+a_3=a_1\left(1+q+q^2\right)=7$　①　……………………………1 分

【备注 1】正确写出“$a_1\left(1+q+q^2\right)=7$”、“$\frac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q}=7$”之一，给 1 分。

因为$a_3,3a_2,a_4$成等差数列,则$6a_2=a_3+a_4$即$6a_1q=a_1q^2+a_1q^3$②………1 分

【备注 2】正确写出“$6a_2=a_3+a_4$”、“$6a_1q=a_1q^2+a_1q^3$”之一，给 1 分。

故联立①②可得$q^2+q-6=0$,解得$q=2$或$q=-3$(舍)………………2 分(4 分)

【备注 3】正确写出“$q^2+q-6=0$”、“$q=2$”之一，可给 2 分。

$\therefore a_1=1,a_n=2^{n-1}$………………………………………………………2 分(6 分)

【备注 4】正确写出“$a_n=2^{n-1}$”给 2 分.

(2)由$b_n=a_n\log_2 a_{n+1}^2$得$b_n=2n\cdot2^{n-1}=n\cdot2^n$……………………………1 分

则$T_n=b_1+b_1+\cdots+b_n=1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n$　①…………………1 分(8 分)

所以$2T_n=1\cdot2^2+2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}$　②…………………1 分

【备注 5】写出能体现将①式两边同乘以 2 的方法,给 1 分.

① —②得……………………………………………………………1 分(10 分)

【备注 6】正确写出“①—②”、“②—①”、“两式相减”之一，给 1 分。

则$-T_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\frac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot2^{n+1}$…1 分

【备注 7】见“$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n$”、“$-n\cdot2^{n+1}$”、“$2^{n+1}-2-n\cdot2^{n+1}$”之一，给 1 分。

$\therefore T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$……………………………………………………1分（12分）

【备注8】正确写出“$(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$”、“ $n\cdot 2^{n+1}-2^{n+1}+2$”之一，给1分。

理17 文19题第二问

方法二：(2) 由 $b_n=a_n\log_2 a_{n+1}^2$，得 $b_n=2n\cdot 2^{n-1}$ …… 1分

$T_n=2\times 2^0+4\times 2+6\times 2^2+\cdots+2(n-1)2^{n-2}+2n\cdot 2^{n-1}$ ① … 1分(8分)

$2T_n=2\times 2+4\times 2^2+\cdots+2(n-1)2^{n-1}+2n\cdot 2^n$ ② … 1分

①-②得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-2n\cdot 2^n$ … 1分(10分)

$=\frac{2-2^{n+1}}{1-2}-2n\cdot 2^n$

$=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}$ … 1分

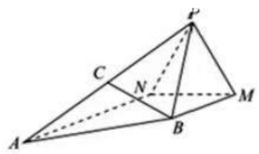
[备注]正确写出“①-②”、“②-①”、“两式相减”之一，给1分

$T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ … 1分(12分)

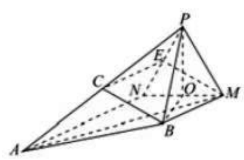
18.如图，在四棱锥$P-ABMN$中，ΔPMN是边长为1的正三角形，面$PMN\perp$面$AMN, AN//BM$，$AN\perp NP, AN=2BM=2$.C为PA的中点.

（1）求证:$BC//$平面PMN;

（2）线段PA上是否存在点F，使二面角$F-MN-P$的余弦值为$\frac{\sqrt{201}}{67}$，若存在，求PF.若不存在，请说明理由。



解：(1)证明:取PN中点E，连接CE和ME……1分



$\because C$为PA中点，$\therefore CE//AN$且$CE=\frac{1}{2}AN$………1分

【备注1】见“$CE//AN$”给1分。

$\because BM//AN$且$BM=\frac{1}{2}AN$ $\therefore BM//CE$且$BM=CE$……1分(3分)

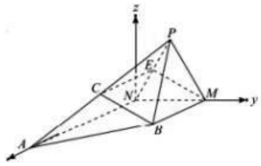
【备注2】见“$BM//CE$”给1分。

$\therefore$四边形$BMEC$为平行四边形,则$BC//EM$ ………1分

【备注3】见“$BC//EM$”给1分。

$\because EM\subset$面PMN，$BC\not\subset$面PMN，$\therefore BC//$面PMN……1分(5分)

【备注4】若缺少写出“$BC\not\subset$面PMN,”扣1分.



(2)取MN中点O，连接PO,则等边$\triangle PMN$中$PO\perp MN$.

$\because$面$PMN\perp$面AMN,面$PMN\cap$面$AMN=MN$

$\therefore PO\perp$面AMN,可得$PO\perp AN$.

又$AN\perp NP$,$PO\cap NP=P$,$\therefore AN\perp$面PMN……………………1分

【备注5】正确写出“$\therefore AN\perp$面PMN”，才给1分。

以N为坐标原点，NA,NM,Nz为x,y,z轴建立空间直角坐标系，

$N(0,0,0),M(0,1,0),A(2,0,0),P\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$……………………1分(7分)

【备注6】至少正确写出非原点外1个点坐标,可给1分.

设$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PA}$，则$F\left(2\lambda,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$

依题意可得平面PMN的法向量为$\vec{m}=(1,0,0)$，………………1分(8分)

设平面MNF的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{NM}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{NF}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$

取$\vec{n}=(\sqrt{3}(\lambda-1),0,4\lambda)$……………………………………………2分(10分)

【备注7】正确写出“$\vec{n}=(\sqrt{3}(\lambda-1),0,4\lambda)$”给2分;若法向量结果不正确,但前面出现“$\begin{cases}\overrightarrow{NM}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{NF}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$”可给1分。

二面角$F-MN-P$为θ，则$|\cos\theta|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}$……………………1分

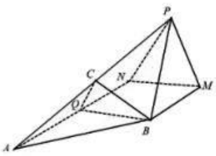
【备注8】正确写出公式“$|\cos\theta|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}$”、“$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$”之一，给1分。

$=\dfrac{|\sqrt{3}(\lambda-1)|}{\sqrt{19\lambda^2-6\lambda+3}}=\dfrac{\sqrt{201}}{67}$ ∴ $\lambda=\dfrac{2}{3},\lambda=2$（舍）

则 $PF=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ ……………………………………………………1 分(12 分)

【备注 9】正确写出“$PF=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$”给 1 分。

解法二：（1）如图所示：取 AN 的中点 Q，连接 BQ，CQ ………1 分



$\because$ 在 $\triangle ANP$，C 为 AP 中点，Q 为 AN 中点，$\therefore CQ//PN$

$\therefore PN\subset$ 平面 PNM $\therefore CQ//$ 平面 PNM ……………………1 分(2 分)

（说明1：见 $CQ//$ 平面 PNM 给1分）

$\because$ 在四边形 $ABMN$ 中，$AN//BM$，$AN=2BM=2$，Q 为 AN 中点，$\therefore QN=BN=1$，$QN//BM$

$\therefore$ 四边形 $BMNQ$ 为平行四边形 $\therefore BQ//MN$

$\therefore BQ//$ 平面 PMN ……………………………………………………1 分(3 分)

（说明2：见 $BQ//$ 平面 PMN 给1分）

又 $\because BQ\cap CQ=Q$ $\therefore$ 平面 $CQB//$ 平面 PMN …………………………1 分

$\therefore BC//$ 平面 PMN ………………………………………………………1 分(5 分)

（说明3：若是没有平面 $CQB//$ 平面 PMN，则扣1分）

（2）取 MN 的中点 O，连接 PO，则在等边 ΔPMN 中，$PO\perp MN$

$\because$ 平面 $PMN\perp$ 平面 AMN，平面 $PMN\cap$ 平面 $AMN=MN$

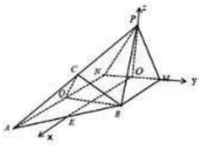
$\therefore PO\perp$ 平面 AMN，可得 $PO\perp AN$

$\because AN\perp NP$，$PO\cap NP=P$ $\therefore AN\perp$ 平面 PMN ……………………………1 分(6 分)

（说明4：见 $AN\perp$ 平面 PMN 可给1分）

取 AB 的中点 E，以 O 为原点，分别以 OE、OM、OP 为 x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系，如图所示：

则$M(0,\frac{1}{2},0),N(0,-\frac{1}{2},0),P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}),A(2,-\frac{1}{2},0),B(1,\frac{1}{2},0)$



$\therefore \overrightarrow{MN}=(0,-1,0),\overrightarrow{AP}=(-2,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{MB}=(1,0,0)$............1 分(7 分)

（说明 5：正确建立空间直角坐标系，且至少正确写出非原点外的一个点坐标，可给 1 分）

由已知$\overrightarrow{MB}=(1,0,0)$是平面$PMN$的一个法向量，记为$\vec{m}=(1,0,0)$..........**1 分(8 分)**

假设线段PA上存在点F满足已知条件，则有$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AP}$,且$0\le\lambda\le1$

设$F(x_0,y_0,z_0)$，有$\overrightarrow{AF}=(x_0-2,y_0+\frac{1}{2},z_0)\therefore(x_0-2,y_0+\frac{1}{2},z_0)=\lambda(-2,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\therefore x_0=2-2\lambda,y_0=\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2},z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$，即$F(2-2\lambda,\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda)$

$\overrightarrow{OF}=(2-2\lambda,\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda)$

设平面FMN的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$， 则$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{OF}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$

取$\vec{n}=(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,0,2\lambda-2)$...**2 分(10 分)**

(说明6：正确写出$\vec{n}=(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,0,2\lambda-2)$给2分；若法向量结果不正确，

但前面出现$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{OF}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$可给1分)

由已知得$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\left|\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda+0+0}{1\times\sqrt{\frac{3}{4}\lambda^2+(2\lambda-2)^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{201}}{67}$

整理得$2412\lambda^2+1608\lambda-804=0$，即化简得$3\lambda^2+2\lambda-1=0$

$\therefore$解得$\lambda=\frac{1}{3}$，$\lambda=-1$(舍去)...**1 分**

$\therefore$ 线段PA上存在点F，当$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}$时，已知条件成立

$\because \left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{4+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{5}\ \therefore PF=\frac{2}{3}\times\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ ……………………………………**1 分(12 分)**

求平面 FMN 的一个法向量的另一种解法：

$$\therefore \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{OF}\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2\quad 2\lambda & \frac{1}{2}\lambda\quad \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda \end{vmatrix}\ (-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,0,2-2\lambda)$$

$\therefore$ 平面MNF的一个法向量可取$\vec{n}=(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,0,2\lambda-2)$

（说明 7：得出正确法向量给 2 分；若是正确列出行列式，但法向量结果不正确可给 1 分）

第（2）小题的另一种解法：几何法

作$FE//AN$，$EG\perp NM$

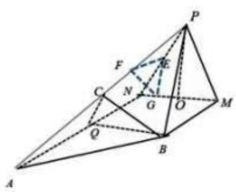
$\because MN\perp FE,MN\perp EG,EF\cap EG=E$

$\therefore MN\perp$平面FNG

$\therefore MN\perp FG$ ……………………………………………………**1 分(7 分)**

$\therefore \angle FGE$为二面角$F-MN-P$的平面角

（说明 8：正确做出二面角的平面角和证明给 2 分，若只是正确做出平面角可给 1 分）



设$PE=a$,在ΔANP中,$\frac{EF}{NA}=\frac{PE}{PN}$,$\therefore EF=2a$,$\therefore NE=1-a$

在ΔNOP中，由$\frac{NE}{NP}=\frac{EQ}{PO}$得$EQ=\frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}$ …………**1 分(8 分)**

由已知$\cos\angle FGE=\frac{\sqrt{201}}{67}$得$\tan\angle FGE=\frac{8}{\sqrt{3}}$…………**1 分(9 分)**

在直角三角形FEG中，$\tan\angle FGE=\frac{EF}{EG}=\frac{2a}{\frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}}=\frac{8}{\sqrt{3}}$

7

$\therefore a=\dfrac{2}{3}$ ……………………………………………………………………1 分(10 分)

在直角三角形ANP中，$AP=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ ………………………………………1 分

所以在ΔANP中，由$\dfrac{PE}{PA}=\dfrac{PE}{PN}$得$PF=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ ……………………………………1 分(12 分)

19.随着科技的不断发展，“智能手机”已成为人们生活中不可缺少的必需品，下表是年广西某地市手机总体出货量(单位：万部)统计表.

年份	2018年	2019年	2020 年	2021 年	2022 年
年份代码x	1	2	3	4	5
[illegible]	4.9	4.1	3.9	3.2	3.5

并计算求得$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=-3.7$.

(1) 已知该市手机总体出货量y**与年份代码**x之间可用线性回归模型拟合，**求**y**关于**x**的线性回归方程；**

(2) 预测 2023 年该市手机总体出货量.

附:线性回归方程$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ **中斜率与截距的最小二乘估计公式分别为**

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\ \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.$$

解：(1) 由题中统计表得$\overline{x}=\dfrac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3$ ………………1 分

$\overline{y}=\dfrac{1}{5}(4.9+4.1+3.9+3.2+3.5)=3.92$ ………………………………1 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=10$ ……………………………………………………2 分(4 分)

【备注 1】写出正确结果“3”、“3.92”、“10”，依次**各给 1 分、1 分、2 分。**

由题意得 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{-3.7}{10}=-0.37$……………………2 分（6 分）

【备注 2】见“$\frac{-3.7}{10}$”、“ -0.37”之一，给 2 分。

∴ $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=5.03$ ………………………………………………1 分

【备注 3】结果正确，见“$\hat{a}=5.03$ ”给 1 分。

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $y=-0.37x+5.03$……………… 1 分（8 分）

【备注 4】结果正确，见“$y=-0.37x+5.03$”给 1 分。

(2)由题意得 2023 年对应的年份代码 $x=6$……………………1 分(9 分)

【备注 5】见“$x=6$”给 1 分。

代入 $\hat{y}=-0.37x+5.03$，得 $\hat{y}=2.81$………………………………2 分(11 分)

【备注 6】见“$\hat{y}=2.81$”给 2 分。

所以预测 2023 年该市手机总体出货量为 2.81 万部……………1 分(12 分)

【备注 7】见“2.81 万部”给 1 分。

20. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 经过点 $P(1,-2)$，过点 $Q(0,-1)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个不同交点 A，B，且直线 PA 交 y 轴于 M，直线 PB 交 y 轴于 N.

（1）求直线 l 斜率的取值范围;

（2）证明:存在定点 T，使得 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QT},\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QT}$ 且 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=-4$.

解:(1)解法 1: 将 $P(1,-2)$ 代入抛物线得 $p=2$. ∴ $y^2=4x$……………2 分

【备注 1】写出“$y^2=4x$”,给 2 分.若结果不准确,但写出“$p=2$”,可给 1 分

依题意可设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,直线 $l:y=kx-1(k\neq 0)$………………1 分(3 分)

【备注 2】见“$y=kx-1$”,可给 1 分

联立直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 得: $k^2x^2-(2k+4)x+1=0$,

则$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{4+2k}{k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{1}{k^2} \end{cases}$ ……………………………………………………1 分

【备注 3】正确写出“$x_1+x_2=\dfrac{4+2k}{k^2}$”、“$x_1x_2=\dfrac{1}{k^2}$”之一，给 1 分。

由$\begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta>0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases}$ 得$k>-1$且$k\neq 0$……………………………………………1 分(5 分)

【备注 4】正确写出“$\begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$”、“$k>-1$且$k\neq 0$”之一，给 1 分。

又直线PA交y轴于M，直线PB交y轴于N，所以直线不能

过$P(1,-2)$及$(1,2)$，$\therefore k\neq -1$且$k\neq 3$，

综上$k\in(-1,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$……………………………………………1 分（6 分）

【备注 5】见“$k\in(-1,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$”、“$-1<k<0$或$0<k<3$或$k>3$”之一，

可给 1 分。

(1)解法 2：将$P(1,-2)$代人抛物线得$p=2,\therefore y^2=4x$………………2 分

【备注 1】写出“$y^2=4x$”,给 2 分.若结果不准确,但写出“$p=2$”,可给 1 分

依题意可设$A(x_1,y_1),B(x_1,y_1)$,直线$l:y=kx-1(k\neq 0)$…………… ….1 分(3 分)

【备注 2】见“$y=kx-1$”,可给 1 分

$\begin{cases} y=kx-1 \\ y^2=4x \end{cases}$，得：$ky^2-4y-4=0$，……………… ….1 分(4 分)

【备注 3】只要联立方程消去x后的方程正确即可得这 1 分。

则$\begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta=16+16k>0 \end{cases}$，得$k>-1$且$k\neq 0$ ……………… ….1 分(5 分)

【备注 4】写出$\begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta=16+16k>0 \end{cases}$，或 $k>-1$且$k\neq 0$其中之一给 1 分

又直线PA交y轴于M，直线PB交y轴于N，所以直线不能

过$P(1,-2)$及$(1,2)$，$\therefore k\neq -1$且$k\neq 3$，

综上$k\in(-1,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$……………………………………………1 分（6 分）

【备注 5】见“$k\in(-1,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$”、“$-1<k<0$或$0<k<3$或$k>3$”之一，可给 1 分。

(2)设点$M(0,y_M),N(0,y_N)$，由$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QT}$．$\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QT}$，$Q(0,-1)$，

则可设$T(0,t)$ $\overrightarrow{QM}=(0,y_M+1),\overrightarrow{QT}=(0,t+1)$.

$\because \overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QT},\therefore y_M+1=\lambda(t+1)$ 故$\frac{1}{\lambda}=\frac{t+1}{y_M+1}$ ……………………………1 分

同理:$\frac{1}{\mu}=\frac{t+1}{y_N+1}$ …………………………………………………………1 分(8 分)

【备注 6】见“$\frac{1}{\lambda}=\frac{t+1}{y_M+1}$”、“$\frac{1}{\mu}=\frac{t+1}{y_N+1}$”各给 1 分。

$\because k_{PA}=\frac{y_1+2}{x_1-1}=\frac{4}{y_1-2},\therefore$直线$PA:y+2=\frac{4}{y_1-2}(x-1)$，

令$x=0$得$y_M=\frac{-2y_1}{y_1-2}$……………………………………………………1 分

同理$y_N=\frac{-2y_2}{y_2-2}$，……………………………………………………1 分（10 分）

【备注 7】见“$y_M=\frac{-2y_1}{y_1-2}$”、“$y_N=\frac{-2y_2}{y_2-2}$”各给 1 分。

$\therefore\frac{1}{\mu}=\frac{t+1}{y_N+1}=(t+1)\frac{2-y_2}{y_2+2},\frac{1}{\lambda}=\frac{t+1}{y_M+1}=(t+1)\frac{2-y_1}{y_1+2}$

$\therefore\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=(t+1)\left(\frac{-y_1+2}{y_1+2}+\frac{-y_2+2}{y_2+2}\right)=(t+1)\frac{-2y_1y_2+8}{(y_1+2)(y_2+2)}$…………1 分(11 分)

【备注 8】若$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$最终表达式不准确,但表达式中出现$y_1+y_1$或$y_1\cdot y_2$其中之一,也可给 1 分。

$=(t+1)\dfrac{8+\dfrac{8}{k}}{4+\dfrac{4}{k}}=2(t+1)=-4\ \therefore t=-3$

所以存在点 $T(0,-3)$ 满足题意. ……………………………………1 分(12 分)

【备注 9】见"$T(0,-3)$"即给 1 分;

21. 已知函数 $f(x)=e^x-ax^2+2ax-1$，其中 a 为常数，e 为自然对数底数，$e=2.71828\cdots$，若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2.

（1）求实数 a 的取值范围;

（2）证明: $\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1}>2$.

解：(1) $f(x)=e^x-ax^2+2ax-1$, $f'(x)=e^x-2ax+2a$，…………………1 分

【备注 1】求导结果正确,见"$f'(x)=e^x-2ax+2a$"给 1 分.

令 $\varphi(x)=f'(x)=e^x-2ax+2a$，则 $\varphi'(x)=e^x-2a$.

因 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，故 $\varphi(x)=e^x-2ax+2a$ 有两个零点……1 分(2 分)

若 $a\leqslant0$，则 $\varphi'(x)>0$, $\varphi(x)$ 单调递增，不可能有两个零点…………1 分(3 分)

【备注 2】见"若 $a\leqslant0$,不可能有两个零点"可给 1 分.

所以 $a>0$，令 $\varphi'(x)=e^x-2a=0$ 得 $x=\ln 2a$

当 $x\in(-\infty,\ln 2a)$ 时，$\varphi'(x)<0$, $\varphi(x)$ 单调递减;

当 $x\in(\ln 2a,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$, $\varphi(x)$ 单调递增;

所以 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(\ln 2a)=4a-2a\ln(2a)$ ……………………………………1 分(4 分)

【备注 3】见"$\varphi(x)_{\min}=4a-2a\ln(2a)$"给 1 分.

因为 $\varphi(x)$ 有两个零点，所以 $4a-2a\ln(2a)<0$，则 $a>\dfrac{1}{2}e^2$.

又 $\varphi(0)=2a>0, \varphi(1)=e>0\ \therefore a>\dfrac{1}{2}e^2$ ……………………………………1 分(5 分)

【备注 4】见"$a>\dfrac{1}{2}e^2$"给 1 分.

(2)设 $x_1<x_2$，因为 $\varphi(1)=e>0$, $\varphi(2)=e^2-2a<0$，则 $1<x_1<2<x_2$………1 分(6 分)

因为$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$，所以$e^{x_1}=2ax_1-2a$，$e^{x_2}=2ax_2-2a$........................1 分

则$\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}}=\frac{x_2-1}{x_1-1}$，取对数得$x_2-x_1=\ln(x_2-1)-\ln(x_1-1)$.

令$x_1-1=t_1,x_2-1=t_2$，则$t_2-t_1=\ln t_2-\ln t_1=2\ln\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$....................1 分(8 分)

【备注 5】见“$t_2-t_1=\ln t_2-\ln t_1=2\ln\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$”给 1 分.

令$F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$..1 分(9 分)

【备注 6】构造函数,见“$F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$”给 1 分.

则$F'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)}>0$，　$\therefore F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$在$(1,+\infty)$上单调递增.

则$F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>F(1)=0,\therefore \ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$.........................1 分(10 分)

【备注 7】见“$\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$”给 1 分.

则$t_2-t_1=2\ln\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}>2\frac{2\left(\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}-1\right)}{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}+1}=4\cdot\frac{\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}}$.........................1 分(11 分)

两边约去$\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}$后化简整理

得$\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}>2$，即$\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1}>2$..............................1 分(12 分)

理 21. 第一问解法二:

（1）$f(x)=e^x-ax^2+2ax-1$，$f'(x)=e^x-2ax+2a$,…….1 分

由题意知，$f'(x)=e^x-2ax+2a=0$有两个根，即$e^x=2a(x-1)$

设$h(x)=e^x$，　$g(x)=2a(x-1)$，

即函数$h(x)$与$g(x)$有两个不同交点….1 分（2 分）

（注：只要见“两个根”或“两个不同交点”）即可得 1 分

设过点（1,0）的直线与$y=h(x)$相切的切点为(x_0,e^{x_0})，

$h'(x)=e^x$，则有$e^{x_0}=\frac{e^{x_0}-0}{x_0-1}$，…………………………1 分（3 分）

解得：$x_0=2$，此时切线斜率为：$h'(2)=e^2$ ………1 分（4 分）

当$g(x)=2a(x-1)$斜率大于e^2时$y=h(x)$与$y=g(x)$有两个交点，则

$2a>e^2$，故有$a>\frac{e^2}{2}$ ………………………………1 分（5 分）

21. (1) 解法3：

$f'(x)=e^x-2ax+2a$. ………… 1分

因为$f(x)$有两个极值点x_1,x_2，则

$f'(x)=e^x-2ax+2a=0$有两个零点.

即 $a=\frac{e^x}{2x-2}=\varphi(x)$ ………… 1分(2分)

转化为 $y=a$ 与 $y=\varphi(x)$有2个交点，$x=1$时，$f'(1)=e\neq0$.

$\varphi'(x)=\frac{2e^x(x-2)}{(2x-2)^2}$，$x\neq1$. ………… 1分(3分)

当 $x\in(-\infty,1)$时，$\varphi'(x)<0$.

当 $x\in(1,2)$时，$\varphi'(x)<0$.

当 $x\in(2,+\infty)$时，$\varphi'(x)>0$

$\therefore$ $y=\varphi(x)$在$(-\infty,1)$，$(1,2)$递减，

在$(2,+\infty)$递增. ………… 1分(4分)

要使 $y=a$与$\varphi(x)$有两个交点，即$a>\varphi(x)_{min}=\frac{e^2}{2}$

$\therefore$ $a>\frac{e^2}{2}$ ………… 1分(5分)

22.在直角坐标系xOy中已知曲线$C:\begin{cases}x=\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），直线$l:\begin{cases}x=1+t\\y=3-2t\end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求曲线C和直线l的极坐标方程；

（2）点P在直线l上，射线OP交曲线C于点R，点Q在射线OP上，且满足$5|OR|^2=4|OP||OQ|$，求点Q的轨迹的直角坐标方程.

解:(1)因为曲线$C:\begin{cases}x=\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数),

所以曲线C的普通方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$……………………………1 分

因为$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$…………………………………………1 分

【备注 1】见"$x=\rho\cos\theta$"、"$y=\rho\sin\theta$"之一,可给 1 分。

所以曲线C的极坐标方程为$\rho^2\cos^2\theta+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{4}=1$.

即$\rho^2=\frac{4}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$……………………………………………1 分(3 分)

因为直线$l:\begin{cases}x=1+t\\y=3-2t\end{cases}$($t$为参数)则直线$l:2x+y-5=0$…………1 分

∴直线l的极坐标方程为$2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-5=0$………………1 分(5 分)

(2)设点Q的极坐标为$Q(\rho,\theta)$,……………………………………1 分

则$|OR|^2=\frac{4}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$,$|OP|=\frac{5}{2\cos\theta+\sin\theta}$………………………1 分(7 分)

【备注 2】见"$|OR|^2=\frac{4}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$"、"$OP=\frac{5}{2\cos\theta+\sin\theta}$"之一,给 1 分。

代入$5|OR|^2=4|OP|\cdot|OQ|$得$\frac{5\times4}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{4\times5}{2\cos\theta+\sin\theta}\cdot\rho$………1 分

即$\rho^2=\frac{2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$,则$4\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta$……1 分

所以点Q轨迹直角坐标方程为$4x^2+y^2=2x+y$…………………1 分(10 分)

【备注 3】正确写出结果"$4x^2+y^2=2x+y$"且有一定的过程,即可给 3 分.

若结果不准确,就按标准给分.

23.已知a,b,c均为正数，且$a^2+2b^2+3c^2=4$，证明:

（1）若$a=c$，则$ab\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$；（2）$a+2b+3c\leqslant2\sqrt{6}$.

证明:(1)∵$a^2+2b^2+3c^2=4,a=c,\therefore4a^2+2b^2=4$……………………1 分

【备注 1】见"$4a^2+2b^2=4$"、"$2a^2+b^2=2$"之一,给 1 分。

∵$4a^2+2b^2\geqslant2\cdot2a\cdot\sqrt{2}b$…………………………………………2 分(3 分)

【备注 2】见“$4a^2+2b^2\geqslant 2\cdot 2a\cdot\sqrt{2}b$”、“ $2a^2+b^2\geqslant 2\sqrt{2}ab$”之一,可给 2 分。

当且仅当 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2},b=1$时取等号……………………………………………1 分

【备注 3】见“$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$”、“ $b=1$”之一,可给 1 分。

∴ $4\geqslant 2\cdot 2a\cdot\sqrt{2}b$,即 $ab\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………………………………1 分(5 分)

(2)∵ a,b,c 均为正数,且 $a^2+2b^2+3c^2=4$,∴由柯西不等式得

$\left(a^2+2b^2+3c^2\right)\left[1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right]\geqslant(a+2b+3c)^2$……………………….2 分(7 分)

∴ $(a+2b+3c)^2\leqslant 4\times 6$…………………………………………………….1 分

∴ $a+2b+3c\leqslant 2\sqrt{6}$,当且仅当 $a=b=c=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时取等号………………2 分(10 分)

【备注 4】漏写“$a=b=c=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$”扣 1 分。