

# 数学试卷

(考试时间:下午3:00—5:00)

**注意事项:**

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,第 I 卷1至4页,第 II 卷5至8页。
2. 回答第 I 卷前,考生务必将自己的姓名、考试编号填写在答题卡上。
3. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效。
4. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡相应位置上,写在本试卷上无效。
5. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

## 第 I 卷

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ ,  $B = \{x \mid x \geq 0\}$  则  $A \cap B =$

A.  $[0, 1]$

B.  $\{0, 1\}$

C.  $[-2, +\infty)$

D.  $\{-2, -1\} \cup [0, +\infty)$

2. 已知  $m < n$ , 则下列结论正确的是

A.  $m^2 < n^2$

B.  $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$

C.  $2^m < 2^n$

D.  $\lg m < \lg n$

3. 已知  $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 1$ ,  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为  $60^\circ$ , 则  $|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}| =$

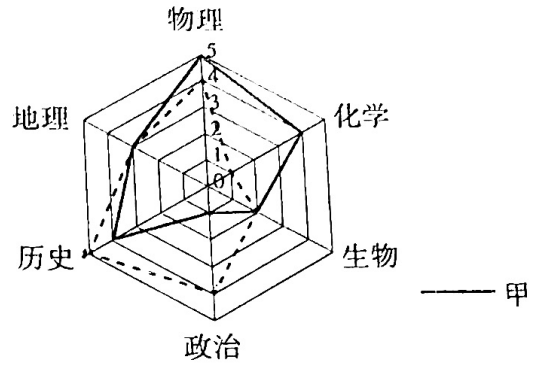
A. 2

B.  $\sqrt{6}$

C.  $2\sqrt{3}$

D. 4

4. 2025年某省将实行“3+1+2”模式的新高考,其中“3”表示语文、数学和英语这三门必考科目,“1”表示必须从物理和历史中选考一门科目,“2”表示要从化学、生物、政治和地理中选考两门科目.为帮助甲、乙两名高一学生应对新高考,合理选择选考科目,将其高一年级的成绩综合指标值(指标值满分为5分,分值越高成绩越优)整理得到如下的雷达图,则下列选择最合理的是



- A. 选考科目甲应选物理、化学、历史
- B. 选考科目甲应选化学、历史、地理
- C. 选考科目乙应选物理、政治、历史
- D. 选考科目乙应选政治、历史、地理

5. 已知  $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, 0 < \alpha < \pi$ , 则  $\sin\alpha - \cos\alpha =$

- A.  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- C.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

- B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $a_{n+1} = S_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ , 则  $a_5 =$

- A. 16
- C. 81

- B. 32
- D. 243

7. 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ , 过直线  $l: y = x + 2$  上的动点  $M$  作圆  $C$  的切线, 切点为  $N$ , 则  $|MN|$  的最小值是

- A.  $2\sqrt{2}$
- C.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

- B. 2
- D.  $\frac{\sqrt{14}}{2}$

8. 已知  $a = \ln \sqrt[3]{3}, b = \frac{\sqrt{2} \ln 2}{4}, c = \frac{\sqrt{e}}{2e}$ , 则下列结论正确的是

- A.  $a > b > c$
- C.  $c > a > b$

- B.  $a > c > b$
- D.  $c > b > a$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的

18. (

得0分。

9. 已知  $f(x) = ax^3 + 3bx + b^2$  在  $x = -1$  处取得极大值3，则下列结论正确的是
- A.  $ab = -1$
  - B.  $ab = -9$
  - C.  $f(1) = -3$
  - D.  $f(0) = 1$
10. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点与双曲线  $C$  的焦点重合，点  $P$  是这两条曲线的一个公共点，则下列说法正确的是
- A. 双曲线  $C$  的渐近线方程为  $y = \pm\sqrt{3}x$
  - B.  $|PF_1| = 7$
  - C.  $\triangle F_1PF_2$  的面积为  $2\sqrt{6}$
  - D.  $\cos\angle F_1PF_2 = \frac{6}{7}$
11. 已知  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上有且仅有2个极值点，则下列结论正确的是
- A.  $4 < \omega < 5$
  - B. 若  $f(x)$  关于直线  $x = \frac{\pi}{3}$  对称，则  $f(x)$  的最小正周期  $T = \frac{\pi}{2}$
  - C. 若  $f(x)$  关于点  $(\frac{5\pi}{18}, 0)$  对称，则  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{9})$  上单调递增
  - D.  $\exists \omega \in (0, +\infty)$ ，使得  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{4}]$  上的最小值为  $\frac{1}{2}$
12. 已知三棱锥  $P - ABC$  的所有棱长均为2， $PO \perp$  平面  $ABC$ ， $O$  为垂足， $D$  是  $PO$  的中点， $AD$  的延长线交平面  $PBC$  于点  $A_1$ ， $CD$  的延长线交平面  $PAB$  于点  $C_1$ ，则下列结论正确的是
- A.  $A_1C_1 \parallel AC$
  - B. 若  $Q$  是棱  $PB$  上的动点，则  $|AQ| + |CQ|$  的最小值为  $2\sqrt{2}$
  - C. 三棱锥  $D - ABC$  外接球的表面积为  $6\pi$
  - D.  $V_{P-A_1BC_1} = \frac{1}{25} V_{P-ABC}$

# 2023年高三年级模拟考试(二)

## 数学试卷

### 第II卷(非选择题 共90分)

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知复数 $z$ 满足 $z \cdot (1+i) = 2i$ ( $i$ 为虚数单位),则 $z =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知 $(1-x)(1+x)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ ,则 $a_1 + a_2 + a_3 =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ( $a > b > 0$ )的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ,点 $M(x_0, y_0)$ ( $x_0 > c$ )是 $C$ 上一点,点 $A$ 是直线 $MF_2$ 与 $y$ 轴的交点, $\triangle AMF_1$ 的内切圆与 $MF_1$ 相切于点 $N$ ,若 $|MN| = \sqrt{2}|F_1F_2|$ ,则椭圆 $C$ 的离心率 $e =$ \_\_\_\_\_.

16. 已知 $a > 0, b > 0$ ,且满足 $2\ln a - 2a^2 + \ln b - \frac{b}{2} + 2 \geq 0$ ,则 $ab =$ \_\_\_\_\_.

四、解答题:本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分10分)

已知 $\{a_n\}$ 是正项等比数列, $\{b_n\}$ 是等差数列,且 $a_1 = b_1 = 1, 1 + a_3 = b_2 + b_4, a_2 + 2 = b_3$ .

(1)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)从下面条件①、②中选择一个作为已知条件,求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ .

条件①: $c_n = a_n b_n$ ( $n \in \mathbf{N}^*$ ); 条件②: $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

注:若条件①和条件②分别解答,按第一个解答计分.

18. (本小题满分12分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, $a, b, c$ 分别为内角 $A, B, C$ 的对边, $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\sin B = \frac{a^2 - c^2}{2bc}$ , 角 $A$ 的平分线

交 $BC$ 于 $D, AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

- (1)求 $A$ ;
- (2)求 $\triangle ABC$ 外接圆面积的最小值.

19. (本小题满分12分)

为响应国家使用新能源的号召,促进“碳达峰碳中和”的目标实现,某汽车生产企业在积极上市四款新能源汽车后,对它们进行了市场调研.该企业研发部门从购买这四款车的车主中随机抽取了50人,让车主对所购汽车的性能进行评分,每款车的性能都有1分、2分、3分、4分、5分五个等级,各评分及相应人数的统计结果如下表.

汽车款式		性能评分				
		1	2	3	4	5
基础版	基础版1	2	2	3	1	0
	基础版2	4	4	5	3	1
豪华版	豪华版1	1	3	5	4	1
	豪华版2	0	0	3	5	3

(1)求所抽车主对这四款车性能评分的平均数和第90百分位数;

(2)当评分不小于4时,认为该款车性能优秀,否则认为性能一般.根据上述样本数据,完成以下列联表,并依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验,能否认为汽车的性能与款式有关?并解释所得结论的实际含义.

汽车性能	汽车款式		合计
	基础版	豪华版	
一般			
优秀			
合计			

(3)为提高这四款新车的性能,现从样本评分不大于2的基础版车型中,随机抽取3人征求意见,记 $X$ 为其中基础版1车主的人数,求 $X$ 的分布列及数学期望.

附: $\chi^2 = \frac{n \cdot a}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$\alpha$	0.10	0.05	0.01	0.005
$\chi_\alpha$	2.706	3.841	6.635	7.879



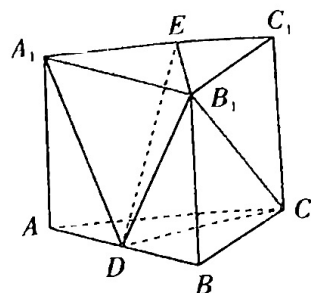
20. (本小题满分12分)

如图,三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,侧面 $BB_1C_1C$ 是矩形, $B_1C \perp AC$ , $AC = BC = \sqrt{2}CC_1$ , $D$ 是 $AB$ 的中点.

(1)证明: $A_1D \perp B_1C$ ;

(2)若 $AC \perp$ 平面 $BB_1C_1C$ , $E$ 是 $A_1C_1$ 上的动点,平面 $B_1CD$ 与平面 $B_1DE$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

求 $\frac{C_1E}{A_1C_1}$ 的值.



21. (本小题满分12分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 经过点 $D(4, 3)$ , 直线 $l_1, l_2$ 分别是双曲线 $C$ 的渐近线, 过 $D$ 分别作 $l_1$ 和 $l_2$ 的平行线 $l_1'$ 和 $l_2'$ , 直线 $l_1'$ 交 $x$ 轴于点 $M$ , 直线 $l_2'$ 交 $y$ 轴于点 $N$ , 且 $|OM| \cdot |ON| = 2\sqrt{3}$  ( $O$ 是坐标原点).

(1)求双曲线 $C$ 的方程;

(2)设 $A_1, A_2$ 分别是双曲线 $C$ 的左、右顶点, 过右焦点 $F$ 的直线交双曲线 $C$ 于 $P, Q$ 两个不同点, 直线 $A_1P$ 与 $A_2Q$ 相交于点 $G$ , 证明: 点 $G$ 在定直线上.

22. (本小题满分12分)

已知函数  $f(x) = (mx - 1)e^x + n$  ( $m, n \in \mathbf{R}$ ) 在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y = ex + 2 - e$ ,

$$g(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

(1) 求  $f(x)$  的值域;

(2) 若  $f(a) = f(b) = g(c) = g(d)$ , 且  $a < b, c < d$ , 证明: ①  $c + d > 0$ ; ②  $b + c > 0$ .

