

万州二中 2022-2023 学年高 2023 届高三上期 12 月月考

数学试题 2022.12.4

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | ax^2 + 2x - 3 = 0\}$ 至多有 1 个真子集，则 a 的取值范围是（ ）

- A. $a \neq -\frac{1}{3}$ B. $a \neq -\frac{1}{3}$
C. $a = 0$ D. $a = 0$ 或 $a \neq -\frac{1}{3}$

2. 设 $\frac{2z+i}{1-i} = 3+i$ ，则 $|z| =$ （ ）

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$

3. 已知事件 A 与事件 B 相互独立，且 $P(A) = 0.2$ ， $P(B) = 0.5$ ，则 $P(A \cup B) =$ （ ）

- A. 0.7 B. 0.6 C. 0.5 D. 0.4

4. 在古代，斗笠作为挡雨遮阳的器具，用竹篾夹油纸或竹叶棕丝等编织而成，其形状可以看成是一个圆锥体，在《诗经》有“何蓂何笠”的句子，说明它很早就为人所用。已知某款斗笠如图所示，它的母线长为 $2\sqrt{2}$ ，侧面展开图是一个半圆，则该斗笠的底面半径为（ ）



- A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

5. 设向量 $\vec{a} = (1, -3)$ ， $\vec{b} = (-2, 4)$ ， $\vec{c} = (-1, -2)$ ，若表示向量 $4\vec{a}$ ， $4\vec{b} - 2\vec{c}$ ， $2(\vec{a} - \vec{c})$ ， $\vec{d}$ 的有向线段首尾相接能构成四边形，则向量 $\vec{d}$ 为（ ）

- A. (2, 6) B. (-2, 6) C. (2, -6) D. (-2, -6)

6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ ，满足 $\log_2 a_2 + \log_2 a_{13} = 1$ ，且 $a_5 a_6 a_8 a_9 = 16$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的公比为（ ）

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. ± 2 D. $\pm \frac{1}{2}$

7. 在直角坐标系 xOy 中, 点 $A(0, 3)$, 直线 $l: y = 2x - 4$, 设圆 C 的半径为 1, 圆心在 l 上, 若圆 C 上存在唯一点 M , 使得 $|MA| = 2|MO|$, 则圆心 C 的非零横坐标为 ()

- A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{11}{5}$ D. $\frac{5}{11}$

8. 已知在 $(-\infty, 2]$ 上的连续函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 满足 $\forall x \in (-\infty, 2]$,

$(x^2 - 5x + 6)f'(x) + (x^2 - 2x - 2)f(x) > 0$ 恒成立, 设 $a = -2ef(1)$, $b = -12f(0)$, $c = 0$, 则 ()

- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$
C. $c > b > a$ D. $b > a > c$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有错选的得 0 分.

9. 已知 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, 则 ()

- A. $P(AB) = \frac{3}{8}$ B. $P(\bar{A}B) = \frac{1}{4}$
C. $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2}$ D. $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

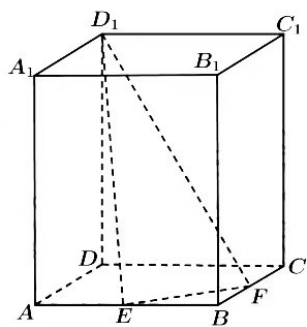
10. A、B、C、D、E 五个人并排站在一起, 则下列说法正确的有 ()

- A. 若 A、B 两人站在一起有 48 种方法 B. 若 A、B 不相邻共有 12 种方法
C. 若 A 在 B 左边有 60 种排法 D. 若 A 不站在最左边, B 不站最右边, 有 72 种方法

11. 某摩天轮共有 32 个乘坐舱, 按旋转顺序依次为 1~33 号 (因忌讳, 没有 13 号), 并且每相邻两个乘坐舱与旋转中心所成的圆心角均相等, 已知乘客在乘坐舱距离地面最近时进入, 在 t min 后距离地面的高度 $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$), 已知该摩天轮的旋转半径为 60m, 最高点距地面 135m, 旋转一周大约 30min, 现有甲乘客乘坐 11 号乘坐舱, 当甲乘坐摩天轮 15min 时, 乙距离地面的高度为 $(75 + 30\sqrt{2})$ m, 则乙所乘坐的舱号为 ()

- A. 6 B. 7 C. 15 D. 16

12. 如图, 直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 2 的正方形, $AA_1 = 3$, E, F 分别是 AB, BC 的中点, 过点 D_1 , E, F 的平面记为 α , 则下列说法中正确的有 ()



- A. 平面 α 截直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面的形状为四边形
- B. 平面 α 截直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得被面的面积为 $\frac{7\sqrt{3}}{2}$
- C. 平面 α 将直四棱柱分割成的上、下两部分的体积之比为47:25
- D. 点B到平面 α 的距离与点 A_1 到平面的距离之比为1:2

第II卷（非选择题）

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 + a_8 + a_9 > 0, a_7 + a_{10} < 0$ ，则当 $n =$ _____时， $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大.
14. 若 $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = a$ ， $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = b$ ，则 $\tan 3x =$ _____结果用 a, b 表示.
15. 已知空间四边形 $ABCD$ 的各边长及对角线 BD 的长度均为6，平面 $ABD \perp$ 平面 CBD ，点 M 在 AC 上，且 $AM = 2MC$ ，过点 M 作四边形 $ABCD$ 外接球的截面，则截面面积的最小值为_____.
16. 已知曲线 $C_1: y = xe^x (x > 0)$ 和 $C_2: y = \frac{x-2}{e^{x-2}}$ ，若直线 l 与 C_1, C_2 都相切，且与 C_2 的相切于点 P ，则 P 的横坐标为_____.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_3 = 5$ ， $a_{17} = 3a_6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

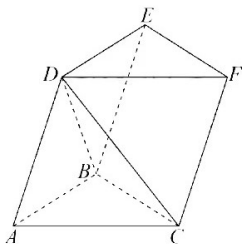
(2) 设 $b_n = \frac{2}{n(a_n + 3)}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. 已知函数 $f(x) = \cos x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) (x \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和单调增区间；

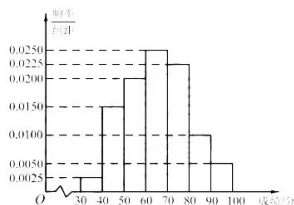
(2) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $f\left(\frac{B}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $b = 6$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

19. 如图，斜三棱柱 $ABC-DEF$ 中，点 D 在底面 ABC 上的射影恰好是 AB 的中点，且 $\angle ABC = 90^\circ, AB = BC = AD$.



- (1) 证明：平面 $DBC \perp$ 平面 $ABED$ ；
(2) 求直线 CD 与平面 $BCFE$ 所成角的正弦值.

20. 2021 年中国共产党迎来了建党 100 周年，为了铭记建党历史、缅怀革命先烈、增强爱国主义情怀，某校组织了党史知识竞赛活动，共有 200 名同学参赛. 为了解竞赛成绩的分布情况，将 200 名同学的竞赛成绩按 $[30, 40)$ 、 $[40, 50)$ 、 $[50, 60)$ 、 $[60, 70)$ 、 $[70, 80)$ 、 $[80, 90)$ 、 $[90, 100]$ 分成 7 组，绘制成了如图所示的频率分布直方图.



- (1) 求这 200 名同学竞赛成绩的中位数及竞赛成绩不低于 80 分的同学人数；
(2) 学校决定对竞赛成绩不低于 80 分的同学中以抽奖的方式进行奖励，其中竞赛成绩不低于 90 分的同学有两次抽奖机会，低于 90 分不低于 80 分的同学只有一次抽奖机会，奖品为党史书籍，每次抽奖的奖品数量（单位：本）及对应的概率如下表：现在从竞赛成绩不低于 80 分的同学中随机选一名同学，记其获奖书籍的数量为 ξ ，求 ξ 的分布列和数学期望.

奖品数量（单位：本）	2	4
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

21. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B ，过点 $D(2, 0)$ 且垂直于 x 轴的直线 l 与该双曲线

交于点 E, F ，设直线 EA 的斜率为 k_1 ，直线 FB 的斜率为 $k_2, k_1 \cdot k_2 = -1$.

- (1) 求曲线 C 的方程；
(2) 动点 M, N 在曲线 C 上，已知点 $P(2, -1)$ ，直线 PM, PN 分别与 y 轴相交的两点关于原点对称，点 Q 在直线 MN 上， $PQ \perp MN$ ，证明：存在定点 T ，使得 $|QT|$ 为定值.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x + 1$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；
(2) 证明，对 $\forall x \in (0, +\infty)$ ，均有 $f(x) < \frac{1+e^{-x}}{\ln(x+1)} + 2$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线