2023届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高三)答案
数学(文科)

1. A 【解析】根据题意得，$B=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid -1<x<3\}$，所以 $A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}=A$. 故选 A.

2. B 【解析】根据题意，设 $z=a+bi$，所以 $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=2i$，所以 $\begin{cases}a^2-b^2=0,\\2ab=2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=1,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\b=-1,\end{cases}$ 所以复数 $z=1+i$ 或 $z=-1-i$，所以 $|z|=\sqrt{2}$. 故选 B.

3. B 【解析】根据题意，$f(1)=1+1=2$，$f(2)=-\ln(2-1)+1=1$，故 $f(f(1))=f(2)=1$. 故选 B. 来源：高三答案公众号

4. C 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，故 $S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=20$，故 $a_1+a_{10}=4$，则 [illegible] $+a_{10}=4$. 故选 C.

5. B 【解析】根据题意，$1=\log_2 2>a=\log_{[illegible]}\sqrt{[illegible]}>\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$，$b=0.1^{-0.1}>0.1^0=1$，$c=\sin 28^\circ<\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，比较可得 $b>a>c$. 故选 B.

6. D 【解析】根据题意，$f(x)\cdot f(x+3)=-2$，则 $f(x+3)=\frac{-2}{f(x)}$，$f(x+6)=\frac{-2}{f(x+3)}$，故 $f(x+6)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的周期为 6，所以 $f(11)=f(5)=\frac{-2}{f(2)}=-\frac{2}{3}$. 故选 D.

7. D 【解析】由 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-2$ 得，$\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=-2$，即 $\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-2$，解得 $\tan\alpha=3$，可得 $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 或 $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$，所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{5}$. 故选 D.

8. D 【解析】根据题意，当 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{b}{a}$ 为负数时，根据不等式可得 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=-\left[\left(-\frac{a}{b}\right)+\left(-\frac{b}{a}\right)\right]\leqslant -2\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)}=-2$，选项 A 不正确；因为 x 不一定为正数，由 A 可知，选项 B 不正确；令 $\sin^2\alpha=t\in(0,1]$，所以 $t+\frac{2}{t}$ 的最小值为 3，选项 C 不正确；$x^2+\frac{1}{x^2+2}=x^2+2+\frac{1}{x^2+2}-2$，因为 $x^2+2\geqslant 2$，所以 $x^2+2+\frac{1}{x^2+2}-2\geqslant 2+\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}$，选项 D 正确. 故选 D.

9. D 【解析】根据题意，$f(x)=A\sin^2\left(\omega x+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{A}{2}\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{A}{2}$，因为 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2},2\right)$ 中心对称，分析可得 $\frac{A}{2}=2$，则 $A=4$，所以 $f(x)=-2\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+2$，则 $2\omega\times\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=\frac{1}{4}+k$，$k\in\mathbf{Z}$. 又因为最小正周期为 T，且 $\frac{\pi}{2}<T<\frac{3\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{2\omega}<\frac{3\pi}{2}$，则 $\frac{2}{3}<\omega<2$，所以 ω 的值为 $\frac{5}{4}$. 故选 D.

10. B 【解析】根据题意，$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AB}|^2$，即 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AO}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\rangle=|\overrightarrow{AB}|^2$，所以 $|\overrightarrow{AO}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\rangle=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$，可得向量 $\overrightarrow{AO}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影为 $|\overrightarrow{AB}|$ 的一半，可分析出点 O 在边 AB 的中垂线上，同理可得，点 O 在边 AC 的中垂线上，所以点 O 为该三角形的外心.
故选 B.

11. A 【解析】根据题意，分析可知点 P 的运动轨迹与几何体表面所交部分可看成 2 个半径为 1 的 $\frac{1}{4}$ 圆

和 2 个半径为 1 的半圆，长度为 $6\times\frac{1}{4}\times2\pi\times1=3\pi$. 故选 A.

12. C 【解析】当 $f(x)=xe^x$ 与直线 $y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 相切时，设切点为 $(x_0,x_0e^{x_0})$，又 $f'(x)=(x+1)e^x$，所以该切线方程为 $y-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(x-x_0)$，易知切线过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，代入切线方程可得 $x_0=1$ 或 $-\frac{1}{2}$. 易得 $a=(x_0+1)e^{x_0}$，当 $x_0=1$ 时，$a=2e$；当 $x_0=-\frac{1}{2}$ 时，$a=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$，结合图象可得实数 a 的最大值为 $2e$.

故选 C.

13. -1 【解析】根据题意，$f(x)=x^2f'(1)+x+2$，则 $f'(x)=2xf'(1)+1$，故 $f'(1)=2f'(1)+1$，故 $f'(1)=-1$.

14. 0.4 【解析】根据题意可得，$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(2+3+4+5+6)=4$，$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(3+7+9+10+11)=8$，又 $\bar{y}=1.9\bar{x}+\hat{a}$，所以 $\hat{a}=8-1.9\times4=0.4$.

15. 2 【解析】由题知 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}mn$，由余弦定理得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{m^2+n^2-12}{2mn}=\frac{1}{2}$，即 $m^2+n^2=mn+12$，所以 $(m+n)^2=12+3mn$，又 $m+n=2\sqrt{6}$，所以 $mn=4$，所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}mn=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4=\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}|F_1F_2|y_P=\sqrt{3}y_P=\sqrt{3}$，所以 $y_P=1$，代入 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $x_P^2=4$，又点 P 位于第一象限，所以点 P 的横坐标为 2.

16. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ 【解析】由已知及正弦定理得 $a^2-\sqrt{3}ac=b^2-c^2$，所以 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$，所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$. 由 $\triangle ABC$ 的外接圆面积为 π，得外接圆的半径为 1. 由正弦定理得 $b=2\sin B=1$，所以 $a^2+c^2-1=\sqrt{3}ac$，所以 $a^2+c^2=\sqrt{3}ac+1\geqslant2ac$，解得 $ac\leqslant2+\sqrt{3}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{4}ac\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{4}$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立.

17. **解**：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由 $2S_n=a_na_{n+1}$①，

得 $2S_{n-1}=a_{n-1}a_n(n\geqslant2)$②，

①$-$②得，$2a_n=a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n(n\geqslant2)$，

则 $a_{n+1}-a_{n-1}=2(n\geqslant2)$，

所以 $d=1$，

所以数列 $a_n=1+(n-1)\times1=n$.

(2)根据题意得 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以 $T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

18. **解**：(1)根据题意可得 $20\times(0.02\times10+0.01\times30+0.015\times50+0.005\times70)=32$(克)，

所以每副该中草药的平均重量约为 32 克.

(2)根据题意可得，按照分层抽样的方式，取出的 6 副该中草药中重量在[20,40)中的有 4 副，重量在[60,80]中的有 2 副.

记重量在[20,40)中的 4 副中草药为 A_1,A_2,A_3,A_4，重量在[60,80]中的 2 副中草药为 B_1,B_2，从中抽取 2 副，所有可能的结果有 $A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4,A_1B_1,A_1B_2,A_2A_3,A_2A_4,A_2B_1,A_2B_2,A_3A_4,A_3B_1,A_3B_2,A_4B_1,A_4B_2,B_1B_2$，共 15 种，其中仅有 1 副重量在[60,80]中的有 $A_1B_1,A_1B_2,A_2B_1,A_2B_2,A_3B_1,A_3B_2,A_4B_1,A_4B_2$，共 8 种，

所以所求概率为 $\frac{8}{15}$.

19. **解**：(1)证明：$\because 2OH=DC$，H 为 DC 的中点，

$\therefore OD\perp OC$.

$\because PO\perp$ 平面 $ABCD$，$OD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PO\perp OD$.

$\because OP\cap OC=O$，$PO\subset$ 平面 POC，$OC\subset$ 平面 POC，

$\therefore OD\perp$ 平面 POC.

又 $\because OD\subset$ 平面 DPO，

$\therefore$ 平面 $DPO\perp$ 平面 POC.

(2)由(1)可知 $OC\perp OD$，

∴点 O 在以 CD 为直径的圆上，

∴当 $OH\perp CD$ 时，$\triangle DOH$ 的面积最大，

又 $V_{H-POD}=V_{P-DOH}$，

∴三棱锥 $H-POD$ 体积的最大值为 $V=\frac{1}{3}\times OP\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times CD\times OH=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times1=\frac{1}{6}$.

20. **解**：(1)设点 $E(x_0,y_0)$，$y_0\geqslant0$，则 $|EF|=y_0+\frac{p}{2}\geqslant\frac{p}{2}$，

因为以 E 为圆心，以 $|EF|$ 为半径的圆的最小面积为 π，

所以 $\pi\left(\frac{p}{2}\right)^2=\pi$，

所以 $\frac{p}{2}=1$，

解得 $p=2$，

所以抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$.

(2)设 $M\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$N\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$，

易得 $F(0,1)$，由题意知直线 MN 的斜率一定存在，则设直线 MN 的方程为 $y=kx+1(k\in\mathbf{R})$，

联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+1,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$，

$\Delta>0$，

所以 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$.

由 $y=\frac{1}{4}x^2$，得 $y'=\frac{x}{2}$，则切线 l_1 的斜率为 $\frac{x_1}{2}$，则切线 l_1 的方程为 $y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，

即 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$①.

同理可得切线 l_2 的方程为 $y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}$②.

①−②得 $x_P=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$，

代入①得，$y_P=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1x_2}{4}=-1$，

所以点 P 的轨迹方程为 $y=-1$.

21. **解**：(1)$f(1)=e^2-a$，

又 $f'(x)=(1+2x)e^{2x}-3ax^2$，

所以 $f'(1)=3e^2-3a$，

则曲线 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e^2-a)=(3e^2-3a)(x-1)$，

令 $y=0$ 得，$x=1-\frac{e^2-a}{3e^2-3a}=\frac{2}{3}$，

故切线在 x 轴上的截距为 $\frac{2}{3}$.

(2)证明：要证函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的零点 x_1,x_2，只需证方程 $e^{2x}-ax^2=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的实数解，即证方程 $\frac{e^x}{x}-\sqrt{a}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的实数解，

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}-\sqrt{a}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $g(1)=e-\sqrt{a}<0$，$g\left(\frac{1}{5}\right)=5e^{\frac{1}{5}}-\sqrt{a}>0$，所以存在 $x_1\in\left(\frac{1}{5},1\right)$，使得 $g(x_1)=0$；

又 $g(2)=\frac{e^2}{2}-\sqrt{a}<0$，$g(5)=\frac{e^5}{5}-\sqrt{a}>0$，所以存在 $x_2\in(2,5)$，使得 $g(x_2)=0$，

故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的零点 x_1，x_2.

由上易知，$\sqrt{a}x_1=e^{x_1}$，$\sqrt{a}x_2=e^{x_2}$，两式相加得 $\sqrt{a}(x_1+x_2)=e^{x_1}+e^{x_2}$，

两式相减得，$\sqrt{a}(x_2-x_1)=e^{x_2}-e^{x_1}$，

则 $x_1+x_2=\frac{(x_2-x_1)(e^{x_1}+e^{x_2})}{e^{x_2}-e^{x_1}}=\frac{(x_2-x_1)(1+e^{x_2-x_1})}{e^{x_2-x_1}-1}=x_2-x_1+\frac{2(x_2-x_1)}{e^{x_2-x_1}-1}$，

令 $t=x_2-x_1$，则 $t>1$，

所以 $nx_1-x_2=\frac{n-1}{2}(x_1+x_2)-\frac{n+1}{2}(x_2-x_1)=\frac{n-1}{2}\left(t+\frac{2t}{e^t-1}\right)-\frac{n+1}{2}t=\frac{(n-1)t}{e^t-1}-t$，

设 $h(t)=\frac{(n-1)t}{e^t-1}-t(t>1)$，

则 $h'(t)=\dfrac{(n-1)[(1-t)e^t-1]}{(e^t-1)^2}-1<0$，

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

则 $h(t)<h(1)=\dfrac{n-1}{e-1}-1=\dfrac{n-e}{e-1}$，

故当 $x_1<x_2$ 时，$nx_1-x_2<\dfrac{n-e}{e-1}(n\geqslant 2, n\in \mathbf{N}^*)$.

22. 解：(1)根据题意，由 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$

得 $\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$

即 $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+y^2=1$，

$\therefore \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

由直线 l 过点 $M(1,0)$，倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$，

得直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数).

(2)根据题意，联立直线 l 的参数方程与曲线 C 的普通方程可得，$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2-4=0$，

化简得 $5t^2+2\sqrt{2}t-6=0$，

可得 $\begin{cases}t_1+t_2=-\dfrac{2\sqrt{2}}{5},\\ t_1t_2=-\dfrac{6}{5},\end{cases}$

则 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\dfrac{8}{25}+\dfrac{24}{5}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$.

23. 解：(1)依题意得 $f(x)=\begin{cases}-3x, x\leqslant -1,\\ x+4, -1<x<2,\\ 3x, x\geqslant 2.\end{cases}$

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，可得函数 $f(x)$ 取最小值3.

(2)由(1)可得 $m=f(-1)=3$，$\therefore a^2+b^2=2$，

根据柯西不等式可得 $(a^2+b^2)(2^2+1^2)\geqslant(2a+b)^2$，

$\therefore (2a+b)^2\leqslant 10$，

$\therefore 0<2a+b\leqslant\sqrt{10}$，

当且仅当 $a=2b$ 时等号成立，

$\therefore 2a+b$ 的最大值为 $\sqrt{10}$.