

# 贵州省 2021 年普通高等学校招生适应性测试

## 理科数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ , 集合  $B = \{y | y = 2^x, x \in A\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $\emptyset$       B.  $\{0, 1, 2\}$       C.  $\{1, 2\}$       D.  $\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\}$
2. 已知  $i$  为虚数单位, 复数  $z = \frac{5}{2-i}$  的虚部为  
A. 1      B. 2      C.  $i$       D.  $2i$
3. 小明处理一组数据, 漏掉了一个数 10, 计算得平均数为 10, 方差为 2. 加上这个数后的这组数据  
A. 平均数等于 10, 方差等于 2      B. 平均数等于 10, 方差小于 2  
C. 平均数大于 10, 方差小于 2      D. 平均数小于 10, 方差大于 2
4. 2020 年 3 月, 中共中央 国务院印发了《关于全面加强新时代大中小学劳动教育的意见》, 提出“把劳动教育纳入人才培养全过程, 贯通大中小学各学段, 贯穿家庭、学校、社会各方面, 与德育、智育、体育、美育相融合, 紧密结合经济社会发展变化和学生生活实际, 积极探索具有中国特色的劳动教育模式”。贵州省某学校结合自身实际, 推出了《职业认知》《家政课程》《田地教育》《手工制作》《种植技术》五门劳动课程, 要求学生从中任选两门进行学习, 经考核合格后方能获得相应学分. 现有甲、乙两人进行选课, 则仅有一门课程相同的概率为  
A.  $\frac{3}{25}$       B.  $\frac{1}{5}$       C.  $\frac{3}{10}$       D.  $\frac{3}{5}$
5. 设  $a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}$ ,  $b = 3^{-0.2}$ ,  $c = (\frac{1}{3})^{-2.1}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是  
A.  $a < b < c$       B.  $b < a < c$       C.  $c < b < a$       D.  $b < c < a$

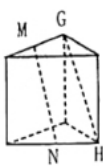
理科数学试卷 第 1 页 (共 6 页)

6. 双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,  $C$  的一条渐近线与抛物线

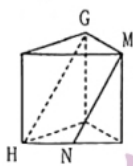
$M: y^2 = 2px (p > 0)$  的一个交点为  $A$  (异于原点), 点  $A$  在以线段  $F_1F_2$  为直径的圆上, 则  $P$  的值为

- A.  $\frac{3}{2}$       B. 3      C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{4}{3}$

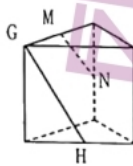
7. 如图,  $G, H, M, N$  分别是直三棱柱的顶点或所在棱的中点, 则在下列图形中  $GH \parallel MN$  的是



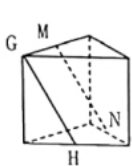
A



B



C



D

8. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 5, a_2 = 9$ , 若数列  $\{a_n + n^2\}$  是等差数列, 则  $\{a_n\}$  的最大项为

- A. 9      B. 11      C.  $\frac{45}{4}$       D. 12

9. 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AB = 3, AD = \sqrt{2}, \angle BAD = \frac{\pi}{4}$ . 若  $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{DC}$ , 且

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} = -3$ , 则  $\lambda$  的值为

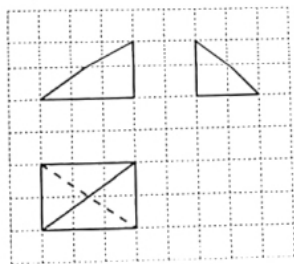
- A.  $-\frac{2}{3}$       B.  $-\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{2}{3}$

10. 若关于  $x$  的方程  $\sqrt{3} \cos 2x = a + \sin 2x$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上有两个不等的实根, 则实数  $a$  的取值范围是

- A.  $(-2, -1]$       B.  $(-2, -\sqrt{3}]$       C.  $[1, 2)$       D.  $[\sqrt{3}, 2)$

11. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线是某三棱锥的三视图, 则该三棱锥外接球的表面积为

- A.  $\frac{17\sqrt{17}}{6}\pi$       B.  $\frac{68\sqrt{17}}{3}\pi$       C.  $68\pi$



12. 已知函数  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$ , 有如下四个结论:

- ① 函数  $f(x)$  的图象关于点  $(0,1)$  对称;
- ② 函数  $f(\tan x)$  的图象的一条对称轴为  $x = \frac{\pi}{4}$ ;
- ③  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 都有  $m \geq f(x)$ , 则  $m$  的最小值为 3;
- ④  $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ , 使得  $m \leq f(x_0)$ , 则  $m$  的最大值为 -1.

其中所有正确结论的编号是

- A. ①③      B. ②④      C. ①②③      D. ②③④

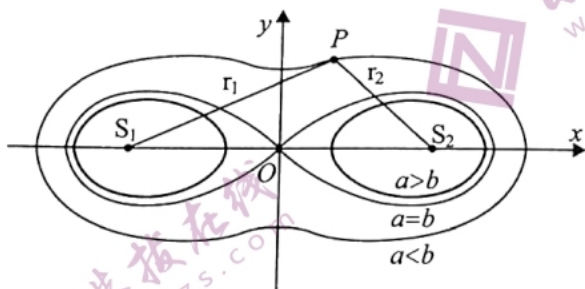
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \geq 0, \\ x - y \geq 0, \\ x \leq 1, \end{cases}$  则  $z = 2x - y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x} + 1$ , 若  $f(a) = 3$ , 则  $f(-a) =$ \_\_\_\_\_.

15. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, a_2 = 2$ , 其前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n \cdot S_{n+2} = S_{n+1}^2$ , 则  $\{a_n\}$  的通项公式为\_\_\_\_\_.

16. Cassini 卵形线是由法国天文学家 Jean-Dominique Cassini (1625~1712) 引入的. 卵形线的定义是: 线上的任何点到两个固定点  $S_1, S_2$  的距离的乘积等于常数  $b^2$ ,  $b$  是正常数. 设  $S_1, S_2$  的距离为  $2a$ , 如果  $a < b$ , 就得到一个没有自交点的卵形线; 如果  $a = b$ , 就得到一个双纽线; 如果  $a > b$ , 就得到两个卵形线.



若  $S_1(-1,0), S_2(1,0)$ , 动点  $P$  满足  $|PS_1| \cdot |PS_2| = 1$ , 则动点  $P$  的轨迹  $C$  的方程为\_\_\_\_\_; 若  $A'$  和  $A$  是轨迹  $C$  与  $x$  轴交点中距离最远的两点, 则  $\triangle APA'$  面积的最大值为\_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

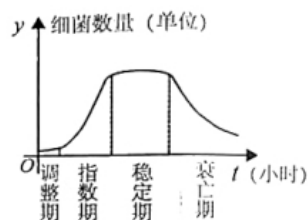
$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}c$ ,  $A = \frac{\pi}{3}$ .

(1) 若  $2\sin C = 3\sin B$ , 求  $a$ ;

(2) 若  $D$  为  $BC$  边的中点, 求线段  $AD$  长的最小值.

18. (12 分)

如图, 在实验室细菌培养过程中, 细菌生长主要经历调整期、指数期、稳定期和衰亡期四个时期. 在一定条件下, 培养基上细菌的最大承载量 (达到稳定期时的细菌数量) 与培养基质量具有线性相关关系. 某实验室在培养细菌  $A$  的过程中, 通过大量实验获得了以下统计数据:



培养基质量 $x$ (克)	20	40	50	60	80
细菌 $A$ 的最大承载量 $Y$ (单位)	300	400	500	600	700

(1) 建立  $Y$  关于  $x$  的回归直线方程, 并预测当培养基质量为 100 克时细菌  $A$  的最大承载量;

(2) 研究发现, 细菌  $A$  的调整期一般为 3 小时, 其在指数期的细菌数量  $y$  (单位)

与细菌  $A$  被植入培养基的时间  $t$  近似满足函数关系  $y = 0.8 \times 2^{t-3} + 20$ , 试估计在 100 克培养基上培养细菌  $A$  时指数期的持续时间 (精确到 1 小时).

附注:

参考数据:  $2^{10} = 1024$ ,  $2^{11} = 2048$ ,  $2^{12} = 4096$ ,  $2^{13} = 8192$ .

参考公式: 回归方程  $\hat{Y} = \hat{b}x + \hat{a}$  中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{x}$$

理科数学试卷 第 4 页 (共 6 页)

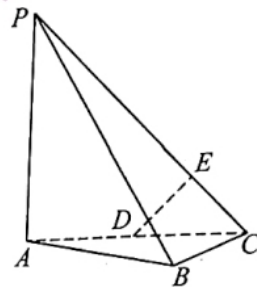


19. (12分)

三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA=4$ ,  $AB=2\sqrt{3}$ ,  $BC=2$ ,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB \perp BC$ ,  $D$  为  $AC$  中点, 点  $E$  在棱  $PC$  上 (端点除外). 过直线  $DE$  的平面  $\alpha$  与平面  $PAB$  垂直, 平面  $\alpha$  与三棱锥的面相交, 交线围成一个四边形.

(1) 在图中画出这个四边形, 并写出作法 (不要求证明);

(2) 若  $DE \perp PC$ , 求直线  $PC$  与平面  $\alpha$  所成角的正弦值.



20. (12分)

已知  $F_1(-1,0)$ ,  $F_2(1,0)$  是椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左, 右焦点,  $P$  是  $E$  上

一点,  $PF_1 \perp PF_2$ ,  $\triangle F_1PF_2$  的面积为 3.

(1) 求椭圆  $E$  的标准方程;

(2) 过  $F_2$  作两条互相垂直的直线与  $E$  分别交于  $A, B$  和  $C, D$ , 若  $M, N$  分别为  $AB$  和  $CD$  的中点. 证明: 直线  $MN$  恒过定点, 并求出定点坐标.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = e^{x-1}$ .

(1) 设函数  $h(x) = xf(x)$ , 求  $h(x)$  的单调区间;

(2) 判断函数  $y = f(x)$  与  $g(x) = \ln x$  的图象是否存在公切线. 若存在, 这样的切线有几条, 为什么? 若不存在, 请说明理由.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

直角坐标系  $xOy$  中，以坐标原点为极点，以  $x$  轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线

$$C \text{ 的极坐标方程为 } \rho^2 = \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}.$$

(1) 曲线  $C$  与直线  $l: \theta = \frac{\pi}{4} (\rho \in \mathbf{R})$  交于  $A, B$  两点，求  $|AB|$ ；

(2) 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = r \cos \alpha, \\ y = r \sin \alpha, \end{cases} (r > 0, \alpha \text{ 为参数})$ ，当  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  时，若  $C$

与  $C_1$  有两个交点，极坐标分别为  $(\rho_1, \theta_1), (\rho_2, \theta_2)$ ，求  $r$  的取值范围，并证明  $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 。

23. [选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

函数  $f(x) = |x| + |x-1|$  的最小值为  $m$ 。

(1) 求  $m$ ；

(2) 设正实数  $a, b, c$  满足  $a+b+c=m$ ，证明： $ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc}$ 。

贵州省 2021 年普通高等学校招生适应性测试

理科数学参考答案及评分参考

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	B	D	B	A	D	B	C	B	C	A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	13	14	15	16
答案	3	-1	$a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 2 \times 3^{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$	$[(x+1)^2 + y^2][(x-1)^2 + y^2] = 1; \frac{\sqrt{2}}{2}$

【说明】第 15 题：仅写成  $a_n = 2 \times 3^{n-2}$  给 3 分；第 16 题：第一空 2 分，第二空 3 分。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：

(1) 因为  $2\sin C = 3\sin B$ ，由正弦定理得  $2c = 3b$  ①

又  $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ， $A = \frac{\pi}{3}$ ，则  $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，即  $bc = 6$  ② …… 2 分

由①②联立解得  $\begin{cases} b = 2, \\ c = 3, \end{cases}$  或  $\begin{cases} b = -2, \\ c = -3. \end{cases}$  (舍) …… 4 分

由余弦定理得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 7$$

所以  $a = \sqrt{7}$ . …… 6 分

$$(2) AD = |\overline{AD}| = \left| \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2} \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\overline{AB}^2 + \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{AC}^2} = \sqrt{\frac{c^2 + bc + b^2}{4}} \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\geq \sqrt{\frac{3bc}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

当且仅当  $b = c = \sqrt{6}$  时等号成立，所以  $AD$  最小值为  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  ..... 12 分

18. 解:

$$(1) \bar{x} = \frac{20 + 40 + 50 + 60 + 80}{5} = 50$$

$$\bar{Y} = \frac{300 + 400 + 500 + 600 + 700}{5} = 500 \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i Y_i = 20 \times 300 + 40 \times 400 + 50 \times 500 + 60 \times 600 + 80 \times 700 = 139000$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 400 + 1600 + 2500 + 3600 + 6400 = 14500 \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i Y_i - 5\bar{x}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{139000 - 5 \times 50 \times 500}{14500 - 5 \times 50^2} = \frac{14000}{2000} = 7$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{x} = 500 - 7 \times 50 = 150$$

所以  $Y$  关于  $x$  的回归直线方程为  $\hat{Y} = 7x + 150$

当培养基质量为 100 克时  $\hat{Y} = 7 \times 100 + 150 = 850$  (单位) ..... 6 分



(2) 在100克培养基上培养细菌A时, 由(1)知最大承载量为850单位

$$\text{又 } y = 0.8 \times 2^{t-3} + 20$$

$$\text{即 } 850 = 0.8 \times 2^{t-3} + 20$$

$$\text{化简得 } 2^{t-3} = 1037.5$$

$$t-3 \approx 10 \text{ 即 } t \approx 13,$$

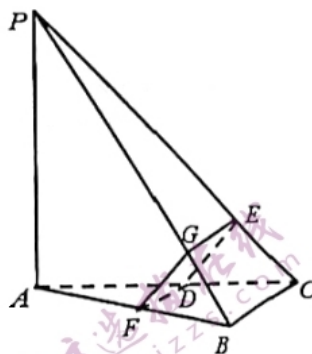
所以在100克培养基上培养细菌A时指数期的持续时间为10小时. .... 12分

19. 解:

(1) 作法: ①过D作DF//BC交AB于F; ..... 2分

②过E作EG//BC交PB于G; ..... 4分

③连接FG, 则四边形DFGE为所作图形. .... 5分



(2) 以B为坐标原点, 以BC的方向为x轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐

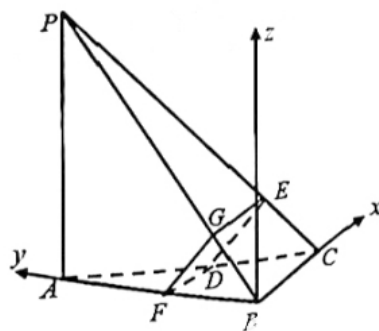
标系B-xyz, 则B(0,0,0), A(0,2√3,0), C(2,0,0), P(0,2√3,4)

由题知D,F分别为AC与AB的中点,

故D(1,√3,0), F(0,√3,0)

又由DE ⊥ PC得PE = 3EC, 设E(x,y,z)

所以(x, y-2√3, z-4) = (6-3x, -3y, -3z)



$$\text{即} \begin{cases} x = 6 - 3x, \\ y - 2\sqrt{3} = -3y, \\ z - 4 = -3z, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z = 1, \end{cases}$$

所以  $E(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$  ..... 8分

故  $\overline{DE} = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1) - (1, \sqrt{3}, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ ,

$\overline{DF} = (0, \sqrt{3}, 0) - (1, \sqrt{3}, 0) = (-1, 0, 0)$

设平面  $\alpha$  的法向量  $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$ ,

由  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{DE} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overline{DF} = 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + z_1 = 0, \\ -x_1 = 0, \end{cases}$

取  $\vec{n} = (0, 2, \sqrt{3})$ , 又  $\overline{PC} = (2, -2\sqrt{3}, -4)$  ..... 10分

所以  $PC$  与平面  $\alpha$  所成角  $\theta$  的正弦值为  $\sin \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overline{PC}|}{|\vec{n}| \cdot |\overline{PC}|} = \frac{\sqrt{42}}{7}$ . ..... 12分

20. 解:

(1) 由题得  $\begin{cases} |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4, \\ \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| = 3, \\ |PF_1| + |PF_2| = 2a, \end{cases}$  则有  $4a^2 = 16$ ,

解得  $a = 2$ ,

又  $a^2 = b^2 + c^2$ , 所以  $b = \sqrt{3}$

所以椭圆  $E$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . ..... 5分

(2) 当直线  $l_1$  和  $l_2$  斜率存在时, 设直线  $l_1$  方程为  $y = k(x-1)$ , 交椭圆  $E$  两点的坐标为

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 由 } \begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$$

于是  $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}$  ..... 7分

所以  $M\left(\frac{4k^2}{3+4k^2}, \frac{-3k}{3+4k^2}\right)$

因为  $l_1 \perp l_2$ , 将上式中的  $k$  换成  $-\frac{1}{k}$ , 同理可得  $N\left(\frac{4}{4+3k^2}, \frac{3k}{4+3k^2}\right)$

若  $\frac{4k^2}{3+4k^2} \neq \frac{4}{4+3k^2}$  即  $k \neq \pm 1$  时,

$$k_{MN} = \frac{\frac{-3k}{3+4k^2} - \frac{3k}{4+3k^2}}{\frac{4k^2}{3+4k^2} - \frac{4}{4+3k^2}} = \frac{-21k^3 - 21k}{12(k^4 - 1)} = \frac{21}{12} \cdot \frac{-k}{k^2 - 1} = \frac{7}{4} \cdot \frac{-k}{k^2 - 1}$$

直线  $MN$  的方程为  $y - \frac{3k}{4+3k^2} = \frac{7}{4} \cdot \frac{-k}{k^2 - 1} \left(x - \frac{4}{4+3k^2}\right)$

化简得  $y = \frac{7}{4} \cdot \frac{-k}{k^2 - 1} \left(x - \frac{4}{7}\right)$ , 此时直线  $MN$  恒过定点  $\left(\frac{4}{7}, 0\right)$  ..... 10分

若  $\frac{4k^2}{3+4k^2} = \frac{4}{4+3k^2}$  即  $k = \pm 1$  时, 直线  $MN$  斜率不存在, 易知直线也过点  $\left(\frac{4}{7}, 0\right)$ ;

当直线  $l_1$  或  $l_2$  斜率不存在时, 其中一条直线为  $x = 1$ , 另一条为  $y = 0$ , 直线  $MN$  过

点  $\left(\frac{4}{7}, 0\right)$ ;

综上所述: 直线  $MN$  恒过定点  $\left(\frac{4}{7}, 0\right)$ . ..... 12分

21. 解:

(1)  $h(x) = xf(x) = xe^{x-1}$ ,  $h'(x) = xe^{x-1} + e^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$ , ..... 2分

当  $x < -1$  时,  $h'(x) < 0$ , 当  $x > -1$  时,  $h'(x) > 0$ ,

所以  $h(x)$  的单调减区间为  $(-\infty, -1)$ , 单调增区间为  $(-1, +\infty)$ . ..... 5分

(2) 设两曲线的公切线为  $l$ , 与曲线  $f(x) = e^{x-1}$  切于点  $(a, e^{a-1})$ , 则切线方程为

$$y - e^{a-1} = e^{a-1}(x - a), \text{ 即 } y = e^{a-1}x + e^{a-1} - ae^{a-1},$$

又与曲线  $g(x) = \ln x$  切于点  $(b, \ln b)$ , 则切线方程为  $y - \ln b = \frac{1}{b}(x - b)$ , 即

$$y = \frac{1}{b}x + \ln b - 1.$$

所以有 
$$\begin{cases} e^{a-1} = \frac{1}{b}, \\ e^{a-1} - ae^{a-1} = \ln b - 1. \end{cases}$$

消元整理得  $e^{a-1} - ae^{a-1} + a = 0$ , 所以方程根的个数即为两曲线的公切线条数.

..... 8分

设  $\varphi(x) = e^{x-1} - xe^{x-1} + x$ ,  $\varphi'(x) = 1 - xe^{x-1}$ .

当  $x < 0$  时,  $\varphi'(x) > 0$ ,

当  $0 < x < 1$  时,  $\varphi'(x) > 0$ ,

当  $x > 1$  时,  $\varphi'(x) < 0$ , 当且仅当  $x = 1$  时,  $\varphi'(x) = 0$ ;

所以  $\varphi(x)$  在  $(-\infty, 1)$  单调递增, 在  $(1, +\infty)$  单调递减

而  $\varphi(1)=1>0$ ,  $\varphi(2)=2-e<0$ ,  $\varphi(-1)=\frac{2}{e^2}-1<0$ ,  $\varphi(0)=\frac{1}{e}>0$ ,

又函数  $\varphi(x)$  在  $\mathbf{R}$  上连续, 所以函数  $\varphi(x)=e^{x-1}-xe^{x-1}+x$  有两个零点, 分别位于区间  $(-1,0)$  和区间  $(1,2)$  内.

所以方程  $e^{a-1}-ae^{a-1}+a=0$  有两个不同的根, 即两曲线有两条公切线.

.....12分

22. 解:

(1) 联立方程 
$$\begin{cases} \rho^2 = \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}, \\ \theta = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$
 ..... 2分

可得  $\rho^2=2$ ,

设  $A, B$  两点的极径分别为  $\rho_A, \rho_B$ , 则  $|AB|=|\rho_A-\rho_B|=2\sqrt{2}$ . ..... 5分

(2) 曲线  $C_1: \begin{cases} x=r\cos\alpha, \\ y=r\sin\alpha, \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数) 转化为极坐标方程为  $\rho=r$

又  $\rho^2 = \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{2}{\sin 2\theta}$

所以  $r^2 = \frac{2}{\sin 2\theta}$ , 由  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  得  $2\theta \in (0, \pi)$ ,  $\sin 2\theta \in (0, 1]$

因为曲线  $C$  与  $C_1$  有两个交点, 则  $r^2 = \frac{2}{\sin 2\theta} > 2$ , 所以  $r > \sqrt{2}$ . ..... 8分

由题知  $\rho_1 = \rho_2$ , 所以  $\frac{2}{\sin 2\theta_1} = \frac{2}{\sin 2\theta_2}$ , 即  $\sin 2\theta_1 = \sin 2\theta_2$ .

又  $\theta_1, \theta_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\theta_1 \neq \theta_2$ , 所以  $2\theta_1 + 2\theta_2 = \pi$ , 即  $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ . ..... 10分



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》