绵阳市高中2020级第一次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。

BADAB　　CDACB　　DD

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13．5　　14．31　　15．$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　16．10.5

三、解答题：本大题共6小题，共70分。

17．解：（1）$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos^2 x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{\cos 2x+1}{2}=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{1}{2}$ ………4分

令$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，………6分

解得$\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，

∴函数$f(x)$的单调递减区间为$[\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$．………8分

（2）由$f(x)=-1$，得$\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{2}$，

∵$x\in[0,\ \pi]$，∴$2x-\dfrac{\pi}{6}\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}]$．………9分

∴$2x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}$，………11分

解得$x=0,\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi$．………12分

18．解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d．

∵$a_1+a_2+a_3=15$，$a_8+a_9=4a_4$，

∴$\begin{cases}3a_1+3d=15,\\ 2a_1+15d=4a_1+12d,\end{cases}$ ………3分

解得$\begin{cases}a_1=3,\\ d=2.\end{cases}$ ………4分

∴$a_n=3+2(n-1)=2n+1$．………6分

（2）∵$c_n=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})$，………8分

∴$\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}+\cdots+\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})$………10分

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3})$. ……………………………………12 分

19．解：（1）∵ $a\cdot\cos B=b(1+\cos A)$，

由正弦定理，得 $\sin A\cdot\cos B=\sin B(1+\cos A)$，……………………………2 分

即 $\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B=\sin B$，

∴ $\sin(A-B)=\sin B$，……………………………………………………4 分

∴ $A-B=B$ 或 $(A-B)+B=\pi$（舍），即 $A=2B$．…………………………6 分

（2）由锐角△ABC，可得 $0<B<\frac{\pi}{2}$， $0<A=2B<\frac{\pi}{2}$， $0<C=\pi-3B<\frac{\pi}{2}$．

即 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$， ∴ $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<\frac{\sqrt{3}}{2}$． ………………………………9 分

∵ $a\cos B=b(1+\cos A)$

∴ $a\cos B=2(1+\cos 2B)$． ……………………………………………10 分

∴ $a=4\cos B$． ……………………………………………………………11 分

∴ $a\in(2\sqrt{2},2\sqrt{3})$． ……………………………………………………12 分

20．解：（1）由题意得 $f'(x)=x^2-(k+4)x+4k=(x-4)(x-k)$． ………………1 分

当 $k=1$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x<1$ 或 $x>4$．

由 $f'(x)<0$，得 $1<x<4$． ……………………………………………………3 分

∴函数 $f(x)$ 在(1，4)上单调递减，在(−∞，1)和(4，+∞)上单调递增． ……………5 分

∴函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=0$，极小值为 $f(4)=-\frac{9}{2}$． ………………………6 分

（2）当 $k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 3$ 时，函数 $f(x)$ 在(0，3)上为单调函数，最多只有一个零点.

当 $0<k<3$ 时，函数 $f(x)$ 在(0，k)上单调递增，在(k，3)上单调递减． …………9 分

要使函数 $f(x)$ 在(0，3)上有两个零点，则需满足：

$0<k<3$ 且 $\begin{cases}f(k)>0,\\ f(0)<0,\\ f(3)<0,\end{cases}$ 解得 $1<k<\frac{13}{9}$． ……………………………………12 分

21．解：（1）由题意得 $f'(x)=2x+\frac{1}{2x}-m$，

∴ $2x+\frac{1}{2x}\geqslant 2\sqrt{2x\cdot\frac{1}{2x}}=2$. ……………………………………………2 分

①当 $m\leqslant 2$ 时，不等式 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

∴函数 $f(x)$在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………3 分

②当 $m>2$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{4}$ 或 $x>\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{4}$.

函数 $f(x)$的单调增区间为 $(0,\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{4})$， $(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{4},+\infty)$，

单调减区间为 $(\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{4},\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{4})$. ……………………………………5 分

综上，当 $m\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)$的增区间为 $(0,+\infty)$，无递减区间；

当 $m>2$ 时，函数 $f(x)$的增区间为 $(0,\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{4})$， $(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{4},+\infty)$.

函数 $f(x)$的减区间为 $(\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{4},\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{4})$. ……………………………6 分

（2）当 $x\in[\frac{1}{2},+\infty)$ 时，由 $f(1)=0$，要使得 $f(x)\geq 0$ 恒成立，

∴ $f'(1)=0$.

又 $f'(x)=2x+\frac{1}{2x}-m$，

∴ $f'(1)=2+\frac{1}{2}-m=0$，解得 $m=\frac{5}{2}$. ……………………………………………8 分

下证：当 $m=\frac{5}{2}$ 时， $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}\ln x-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$.

$f'(x)=2x+\frac{1}{2x}-\frac{5}{2}=\frac{4x^2-5x+1}{2x}=\frac{(4x-1)(x-1)}{2x}$. ……………………………9 分

∵ $x\in[\frac{1}{2},+\infty)$，

∴由 $f'(x)>0$，解得 $x>1$．由 $f'(x)<0$ 解得 $0<x<1$.

∴ $f(x)\geqslant f(1)=0$. ……………………………………………………………11 分

综上， $m=\frac{5}{2}$. ………………………………………………………………12 分

22．**解：**（1）由题意得圆 C 的普通方程为 $(x-3)^2+y^2=9$.

直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y+6=0$. ……………………………………………4 分

∵圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{3\sqrt{3}+6}{2}>3$，

∴直线 l 和圆 C 相离. ……………………………………………………5 分

（2）设 $P(3+3\cos\theta,3\sin\theta)\ (\theta\in[0,2\pi))$.

由 $\dfrac{|3\sqrt{3}\cos\theta-3\sin\theta+6+3\sqrt{3}|}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴ $|2\cos(\dfrac{\pi}{6}+\theta)+2+\sqrt{3}|=\sqrt{3}$，则 $\cos(\dfrac{\pi}{6}+\theta)=-1$. ……………………………7 分

∴ $\dfrac{\pi}{6}+\theta=\pi$，则 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$， ……………………………………………8 分

∴ $P(3-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2})$， ……………………………………………………9 分

∴ $\overline{CA}\cdot\overline{CP}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………10 分

23．解：（1） $f(x)=|x+2|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$

$\geqslant\left|(x+2)-(x+\dfrac{1}{2})\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{3}{2}+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$ ……………………………3 分

$\geqslant\dfrac{3}{2}$. (当且仅当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，取等) ……………………………4 分

∴函数 $f(x)$ 的最小值为 $\dfrac{3}{2}$. ……………………………………………5 分

（2）∵$f(a)+f(b)+f(c)=18$，

∴ $a+b+c=3$. ……………………………………………………………6 分

由 $(a+b+c)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+1+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+1$

$=(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a})+(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c})+(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c})+3\geqslant 9$，

得 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant 3$. ……………………………………………………8 分

∵ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$，

∴ $a^2+b^2+c^3\geqslant 3$. ……………………………………………………9 分

$\therefore (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(a^2+b^2+c)\geqslant 9$，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant \frac{9}{a^2+b^2+c^2}$． ……………………………………………………10 分