高三数学试题参考答案

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1.D 2.C 3.B 4.B 5.A 6.B 7.C 8.A

二、多项选择题(共 4 小题,每小题至少 2 个以上的答案正确,错选 0 分,漏选 2 分,全对 5 分,共 20 分)

9.BCD 10.AC 11.ABD 12.ACD

三、填空题(共 4 个小题,每小题 5 分,本题满分 20 分)

13.$2x-y=0$ 14.$(-\infty,1)$ 15.$\frac{1}{8}$ 16.4,$\frac{4003}{45}$

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.解:(1)由$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-3$得$2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=-3$,………… 2 分

又$\boldsymbol{a}^2=1$,$\boldsymbol{b}^2=4$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$.………… 3 分

所以$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{2}$,………… 4 分

又因为$0°\leqslant\theta\leqslant180°$,

所以$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的夹角为$120°$.………… 5 分

(2)由已知得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2\times\cos60°=1$,………… 6 分

则$(2t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})=4t\boldsymbol{a}^2+2t^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{b}^2=2t^2-2$,………… 8 分

因为向量$2t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$2\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$的夹角为钝角,所以$t^2-1<0$,即$-1<t<1$.………… 9 分

设$2t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\lambda(2\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})$,$\lambda<0$,则$\begin{cases}2t=2\lambda\\ \lambda t=-1\\ \lambda<0\end{cases}$,无解,故两个向量的夹角不可能为$180°$,

所以向量$2t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$2\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$的夹角为钝角时,$t$的取值范围为$-1<t<1$.………… 10 分

18.解:(1)选择条件①,

由$\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}+1=\frac{c^2}{ab}$及正弦定理,可得$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=\frac{c^2}{ab}$,………… 2 分

即$a^2+b^2-c^2=-ab$,………… 3 分

由余弦定理,得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$,………… 5 分

因为$0<C<\pi$,所以$C=\frac{2\pi}{3}$.………… 6 分

选择条件②,

由$(a+2b)\cos C+c\cos A=0$及正弦定理,可得$(\sin A+2\sin B)\cos C+\sin C\cos A=0$,… 2 分

即$\sin A\cos C+\cos A\sin C=-2\sin B\cos C$.

即$\sin(A+C)=-2\sin B\cos C$.………… 3 分

在$\triangle ABC$中,$A+B+C=\pi$,

所以$\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$,即$\sin B=-2\cos C\sin B$,

因为$0<B<\pi$,所以$\sin B\neq0$,所以$\cos C=-\frac{1}{2}$.………… 5 分

因为$0<C<\pi$,所以$C=\frac{2\pi}{3}$.………… 6 分

若选③,$\sqrt{3}a\sin\frac{A+B}{2}=c\sin A$,则$\sqrt{3}\sin A\cos\frac{C}{2}=\sin C\sin A$,………… 2 分

因为$\sin A\neq0$,所以$\sqrt{3}\cos\frac{C}{2}=\sin C$,………… 3 分

所以$\sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为$\frac{C}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$,所以$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{3}$,………… 5 分

所以$C=\frac{2\pi}{3}$.………… 6 分

(2)由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=4$,

所以$\frac{1}{\sin A}=\frac{4}{a}$,$\frac{1}{\sin B}=\frac{4}{b}$,………… 7 分

因为$\sin A+\sin B=4\sin A\sin B$,所以$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}=\frac{4}{a}+\frac{4}{b}=4$,所以$a+b=ab$,… 9 分

若$c=2\sqrt{3}$,由余弦定理得$12=a^2+b^2-2ab\times(-\frac{1}{2})$,即$a^2+b^2+ab-12=0$,

所以$(a+b)^2-ab-12=(ab)^2-ab-12=0$,

因为$ab>0$,所以$ab=4$,………… 11 分

所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.………… 12 分

19. 解：(1)由 $f(x+2)=f(-x)$，可得 $f(x)$ 图象关于 $x=1$ 对称. …………………… 1分

因为 $x\in[1,2]$，所以 $-x+2\in[0,1]$，

$f(-x+2)=\log_a x$. …………………… 3分

又 $f(-x+2)=f(x)$，

故所求的表达式为 $f(x)=\log_a x, x\in[1,2]$. …………………… 5分

(2)因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(x+2)=f(x)$，

即函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数. …………………… 6分

因为 $a>1$，由函数 $f(x)$ 的最大值为 1，知 $f(x)_{\max}=f(0)=\log_a 2=1$，即 $a=2$. …………………… 7分

若 $x\in[0,1]$，则 $\log_2(2-x)>\frac{1}{2}$，所以 $0\leqslant x<2-\sqrt{2}$，

当 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，可得 $\sqrt{2}-2<x\leqslant 0$，

所以此时满足不等式的解集为 $(\sqrt{2}-2,2-\sqrt{2})$. …………………… 9分

因为 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，

当 $x\in[-2,-1]$ 时，$f(x)>\frac{1}{2}$ 的解集为 $[-2,-\sqrt{2})$，

当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)>\frac{1}{2}$ 的解集为 $(\sqrt{2},2]$. …………………… 11分

综上：$f(x)>\frac{1}{2}$ 的解集为 $(\sqrt{2}-2,2-\sqrt{2})\cup[-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},2]$ …………………… 12分

20. 解：(1)当 $0<x\leqslant 20$ 时，

$M(x)=(280-3x)x-40-100x=-3x^2+180x-40$， …………………… 2分

当 $x>20$ 时，

$M(x)=x\left[90+\frac{3000(x-2)}{x(x+1)}\right]-100x-40=-10x+\frac{3000(x-2)}{(x+1)}-40$. …………………… 4分

故 $M(x)=\begin{cases}-3x^2+180x-40, 0<x\leqslant 20,\\ -10x+\frac{3000(x-2)}{x+1}-40, x>20.\end{cases}$ …………………… 5分

(2)当 $0<x\leqslant 20$ 时，

$M(x)=-3x^2+180x-40=-3(x-30)^2+2660$，对称轴 $x=30$，开口向下，

故 $M(x)_{\max}=M(20)=2360$， …………………… 7分

当 $x>20$ 时，$M(x)=-10x+\frac{3000(x-2)}{(x+1)}-40$

$=-10x+\frac{3000(x+1-3)}{(x+1)}-40$

$=-10x-\frac{9000}{x+1}+2960$

$=-10(x+1)-\frac{9000}{x+1}+2970$ …………………… 9分

$\leqslant -2\sqrt{10(x+1)\cdot\frac{9000}{x+1}}+2970$

$=2370$，

当且仅当 $10(x+1)=\frac{9000}{x+1}$，即 $x=29$ 时，等号成立， …………………… 11分

因为 $2370>2360$，

所以当 $x=29$ 时，利润最大，最大值为 2370 万元，

故年产量为 29 万箱时，该公司利润最大，最大利润为 2370 万元. …………………… 12分

21. 解：(1)由 $S_n=\frac{3}{2}a_n-n$ 得 $S_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1}-n+1(n\geqslant 2)$，

作差得 $a_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{3}{2}a_{n-1}-1$，即 $a_n=3a_{n-1}+2$， …………………… 1分

即 $a_{n+1}=3a_n+2$，即 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，

所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=3$ 为首项，3 为公比的等比数列，

$a_n+1=3\times 3^{n-1}=3^n$，所以 $a_n=3^n-1$. …………………… 3分

数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1+2^2b_2+3^2b_3+\cdots+n^2b_n=n$，①

当 $n=1$ 时，$b_1=1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_1+2^2b_2+3^2b_3+\cdots+(n-1)^2b_{n-1}=n-1$，②

由①－②可得 $b_n=\frac{1}{n^2}$， …………………… 5分

当 $n=1$ 时，也符合上式，故数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=\frac{1}{n^2}$. …………………… 6分

(2) $\dfrac{(n+1)b_{n+2}}{[\log_3(a_n+1)]^2}=\dfrac{n+1}{(n+2)^2n^2}$ ………………………… 7 分

$=\dfrac{1}{4}[\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}]$，………………………… 8 分

则 $T_n=\dfrac{1}{4}[1-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}]$ ………… 10 分

$=\dfrac{1}{4}[1+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}]$

$=\dfrac{1}{4}[\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}]<\dfrac{5}{16}$，

故 $T_n<\dfrac{5}{16}$成立. ………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=\dfrac{3ax^2+(2a-3)x-2}{x}=\dfrac{(ax-1)(3x+2)}{x}(x>0)$. ………… 1 分

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，$f(x)_{\min}=f(1)=\dfrac{7}{2}a-3$. ……… 2 分

②当 $0<a\leqslant 1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,1]$单调递减，$f(x)_{\min}=f(1)=\dfrac{7}{2}a-3$. …… 3 分

③当 $a>1$ 时，$x\in(0,\dfrac{1}{a})$时，$f'(x)<0$；$x\in(\dfrac{1}{a},+\infty)$时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$单调递减，在$(\dfrac{1}{a},+\infty)$单调递增，

$f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{a})=-\dfrac{3}{2a}+2\ln a+2$. ………………………… 4 分

综上，①当 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)_{\min}=\dfrac{7}{2}a-3$，

②当 $a>1$ 时，$f(x)_{\min}=-\dfrac{3}{2a}+2\ln a+2$. ………………………… 5 分

(2) $f'(x_0)$值的符号为正，………………………… 6 分

理由如下：

由(1)知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$单调递减，不符合题意.

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$单调递减，在$(\dfrac{1}{a},+\infty)$单调递增.

不妨设 $0<x_1<\dfrac{1}{a}<x_2$，由方程 $f(x)=k$ 有两个不同的解 x_1,x_2，

则$\dfrac{3}{2}ax_1^2-2\ln x_1+(2a-3)x_1=\dfrac{3}{2}ax_2^2-2\ln x_2+(2a-3)x_2$，整理得，

$\dfrac{2\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}=\dfrac{3}{2}a(x_1+x_2)+(2a-3)$. ………………………… 7 分

$f'(x_0)=3ax_0-\dfrac{2}{x_0}+(2a-3)=\dfrac{3}{2}a(x_1+x_2)+(2a-3)-\dfrac{4}{x_1+x_2}=\dfrac{2\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-\dfrac{4}{x_1+x_2}$

$=\dfrac{2}{x_2-x_1}[\ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}]$. ………………………… 9 分

令$\dfrac{x_2}{x_1}=t>1$，则$\dfrac{2}{x_2-x_1}>0$，

令 $\varphi(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，$\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

$\varphi(t)$在$(1+\infty)$单调递增，$\varphi(t)>\varphi(1)=0$. ………………………… 11 分

故 $\ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}>0$，$f'(x_0)>0$ 得证. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线