2022—2023学年高三年级上学期期末考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|y=\ln(6x-7)\}$，则 $A\cap B=$

A. $\left\{x\left|1\leqslant x<\frac{7}{6}\right.\right\}$　　B. $\left\{x\left|\frac{7}{6}<x\leqslant 2\right.\right\}$　　C. $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$　　D. $\left\{x\left|x>\frac{7}{6}\right.\right\}$

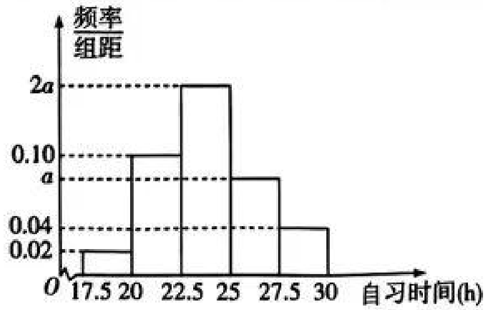
2. 已知在复平面内，复数 z_1,z_2 所对应的点分别为 $(2,5)$，$(-3,-7)$，则 $\frac{z_1\cdot z_2}{i}=$

A. $-29-29i$　　B. $29-29i$　　C. $29+29i$　　D. $-29+29i$

3. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(t,1)$，$\boldsymbol{n}=(-2t,1)$，若 $|2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|^2=4\boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2$，则 $t^2=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 为了解某专业大一新生的学习生活情况，辅导员将该专业部分学生一周的自习时间(单位：h)统计后制成如图所示的统计图，据此可以估计该专业所有学生一周自习时间的中位数为



A. 24.25　　B. 24　　C. 23.75　　D. 23.25

5. 已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AD_1，A_1D 交于点 O，则

A. $OB\perp$ 平面 ACC_1A_1　　B. $OB\perp$ 平面 A_1B_1CD

C. $OB//$ 平面 CD_1B_1　　D. $OB\perp BC_1$

6. 为了处理大数的运算，许凯与斯蒂菲尔两位数学家都想到了构造双数列模型的方法，如计算 256×4 096 时，我们发现 256 是 8 个 2 相乘，4 096 是 12 个 2 相乘，这两者的乘积，其实就是 2 的个数做一个加法，所以只需要计算 8 + 12 = 20，进而找到下表中对应的数字 1 048 576，即 256×4 096 = 1 048 576. 记 $a=\log_{\frac{1}{4}}(645\ 988\times 20\ 000\ 000)+\log_2 8\ 192$，则 $a\in$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024
n	11	12	…	19	20	21	22	23	24	25	…
2^n	2 048	4 096	…	524 288	1 048 576	2 097 152	4 194 304	8 388 608	16 777 216	33 554 432	…

A. $(-1,0)$　　B. $(-2,-1)$　　C. $(-3,-2)$　　D. $(-4,-3)$

7. 已知点 $M(0,2\sqrt{2})$，$N(0,-2\sqrt{2})$，若在直线 $l:mx-ny=0(m>0,n>0)$ 上存在点 A，使得 $|AM|-|AN|=2\sqrt{6}$，则

A. $m>n+2\sqrt{6}$　　B. $m<n+2\sqrt{6}$

C. $m>\sqrt{3}n$　　D. $m<\sqrt{3}n$

8. 已知正数 a,b 满足 $a+b=3$，若 $a^5+b^5\geqslant\lambda ab$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为

A. $\left(-\infty,\frac{81}{2}\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{27}{4}\right]$　　C. $\left(-\infty,\frac{81}{4}\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{27}{2}\right]$

9. 若 $4^{a+1}=\log_{\frac{1}{2}}b=(2c+1)^{-\frac{1}{2}}$，则 a,b,c 的大小关系不可能为

A. $c>b>a$　　B. $c>a>b$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

10. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 F 的两条直线 l_1,l_2 分别与抛物线 C 交于点 A_1,B_1 和 A_2,B_2，且点 A_1,A_2 在 x 轴的上方，则直线 A_1A_2，B_1B_2 在 x 轴上的截距之积为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

11. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球半径为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$，底面边长为 2，$SA>2$. 若 SC 垂直于过点 A 的平面 α，则平面 α 截正四棱锥 $S-ABCD$ 所得的截面面积为

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{8}{3}$

12. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$\sin^2B+2\sin^2C=4\sin^2A$，若 $S_{\triangle ABC}\leqslant\lambda BC^2$（$S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积）恒成立，则实数 λ 的取值范围为

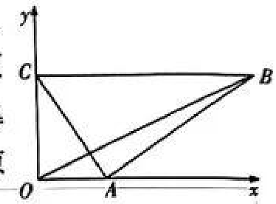
A. $\left[\frac{\sqrt{10}}{6},+\infty\right)$　　B. $\left[\frac{\sqrt{10}}{3},+\infty\right)$　　C. $\left[\frac{\sqrt{10}}{8},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{\sqrt{10}}{4},+\infty\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(3x-1)^2(x-1)^5$ 的展开式中 x^5 的系数为________.

14. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{3}\right)$，$g(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{3}\right)$，$\omega>0$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的对称轴相同，则 ω 的一个值为

15. 在通用技术课程上，老师教大家利用现有工具研究动态问题. 如图，老师事先给学生准备了一张坐标纸及一个三角板，三角板的三个顶点记为 A,B,C，$|AC|=2$，$|AB|=2\sqrt{3}$，$|BC|=4$. 现移动边 AC，使得点 A,C 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上运动，则 $|OB|$（点 O 为坐标原点）的最大值为__________.



16. 已知 $a>0$，函数 $f(x)=x[a\ln(x+1)-x-a]+\ln(x+1)^a$ 在其定义域 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，则实数 $a=$__________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_4+a_{12}=16$，$S_7=28$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

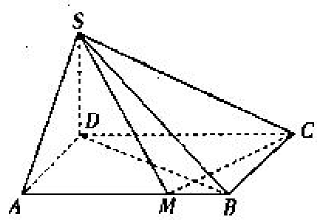
（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{4a_n}{3^{a_n}}$，且 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求满足不等式 $a_n\cdot|T_n-3|>1$ 的 n 的值.

18.（12 分）

如图所示，四棱锥 $S-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形，且 $AB=2AD$，$SD\perp$ 平面 $ABCD$，$\triangle SAD$ 为等腰直角三角形，M 是线段 AB 上靠近 B 的四等分点.

（Ⅰ）求证：平面 $SCM\perp$ 平面 SBD；

（Ⅱ）求直线 SA 与平面 SCM 所成角的正弦值.



19.（12 分）

近年来，各地电商行业迅速发展，电商行业的从业人数也相应增长. 现将某地近 5 年电商行业的从业人数统计如下表所示.

第 x 年	1	2	3	4	5
从业人数 y（万人）	5	8	11	11	15

（Ⅰ）若 y 与 x 线性相关，求 y 与 x 之间的回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（Ⅱ）若甲、乙、丙、丁 4 名大学生毕业后进入电商行业的概率分别为 $\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}$，且他们是否进入电商行业相互独立. 记这 4 人中最终进入电商行业的人数为 X，求 X 的分布列以及数学期望.

参考公式：在线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

20.（12 分）

已知函数$f(x)=e^x+\frac{x^3}{2}-x^2-2ax(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）设函数$m(x)=\frac{f(x)+2ax}{x}$，判断$m(x)$的单调性；

（Ⅱ）若当$x\geqslant 0$时，关于x的不等式$f(x)\geqslant\frac{x^3}{2}+\cos x$恒成立，求$a$的取值范围.

.（12 分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，过右焦点的直线$l$与椭圆$C$交于$M,N$两点，且当$l\perp x$轴时，$|MN|=2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）若直线l的斜率存在且不为0，点M,N在x轴上的射影分别为P,Q，且$R(4,y_0)$，N,P三点共线，求证：$\triangle RMN$与$\triangle RPQ$的面积相同.

二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

已知在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}+2t,\\ y=3-2\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho(1+\cos 2\theta)=2\sin\theta$，点$P$的极坐标为$\left(8,\frac{2\pi}{3}\right)$.

（Ⅰ）求直线l的极坐标方程以及曲线C的直角坐标方程；

（Ⅱ）记M为直线l与曲线C的一个交点，其中$|OM|<4$，求$\triangle OMP$的面积.

［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数$f(x)=|2x+m|+|x-4|$，$g(x)=2x^2-4x+3$.

（Ⅰ）若$m=3$，求不等式$f(x)>7$的解集；

（Ⅱ）若$\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in\mathbf{R}$，使得$f(x_1)\geqslant g(x_2)$成立，求实数m的取值范围.

天一大联考
2022—2023 学年高三年级上学期期末考试
理科数学 · 答案（新）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. **答案** B

命题意图 本题考查函数的定义域及集合的运算.

解析 依题意，$B=\{x|6x-7>0\}=\left\{x\left|x>\frac{7}{6}\right.\right\}$，则 $A\cap B=\left\{x\left|\frac{7}{6}<x\leqslant 2\right.\right\}$

2. **答案** A

命题意图 本题考查复数的几何意义、复数的四则运算.

解析 依题意，$\frac{z_1\cdot z_2}{\mathrm{i}}=\frac{(2+5\mathrm{i})\cdot(-3-7\mathrm{i})}{\mathrm{i}}=\frac{-6-14\mathrm{i}-15\mathrm{i}+35}{\mathrm{i}}=\frac{29-29\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-29-29\mathrm{i}$.

3. **答案** D

命题意图 本题考查平面向量的数量积及其应用.

解析 依题意，$2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}=(2t,2)-(-2t,1)=(4t,1)$，故 $16t^2+1=4t^2+4+4t^2+1$，则 $t^2=\frac{1}{2}$.

4. **答案** C

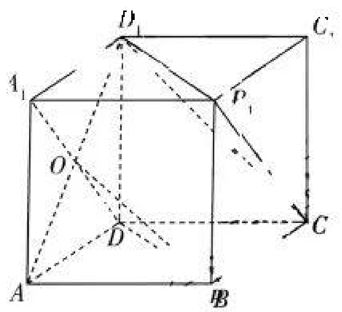
命题意图 本题考查样本的数字特征、频率分布直方图.

解析 依题意，$(0.02+0.04+0.10+a+2a)\times 2.5=1$，解得 $a=0.08$，故前 3 块小矩形的面积分别为 0.05，0.25，0.4，则所求中位数为 $22.5+\frac{0.5-0.05-0.25}{0.16}=23.75$

5. **答案** C

命题意图 本题考查空间线面的位置关系.

解析 作出图形如图所示，连接 BD，因为 $BD/\!/B_1D_1$，$OD/\!/B_1C$，所以平面 $OBD/\!/$平面 CD_1B_1，故 $OB/\!/$平面 CD_1B_1，其他三个选项易知是错误的.



6. **答案** B

命题意图 本题考查对数的运算、数学文化.

解析 因为 $645\ 988\in(524\ 288,1\ 048\ 576)$，$20\ 000\ 000\in(16\ 777\ 216,33\ 554\ 432)$，故 $\log_2 645\ 988\in(19,20)$，$\log_2 20\ 000\ 000\in(24,25)$，则 $\log_2(645\ 988\times 20\ 000\ 000)\in(43,45)$，则 $\log_{\frac{1}{8}}(645\ 988\times 20\ 000\ 000)=-\frac{1}{3}\log_2(645\ 988\times 20\ 000\ 000)\in\left(-15,-\frac{43}{3}\right)$，而 $\log_2 8\ 192=\log_2 2+\log_2 4\ 096=13$，故 $a\in\left(-2,-\frac{4}{3}\right)$，故选 B.

7. **答案** C

命题意图 本题考查双曲线的定义与性质.

解析 由题可知点 A 在双曲线 $C:\frac{y^2}{6}-\frac{x^2}{2}=1$ 的下支上,故直线 l 与曲线 C 有交点. 而曲线 C 的渐近线为 $y=\pm\sqrt{3}x$,直线 $l:y=\frac{m}{n}x$,故 $\frac{m}{n}>\sqrt{3}$,即 $m>\sqrt{3}n$. 来源:高三答案公众

8. **答案** B

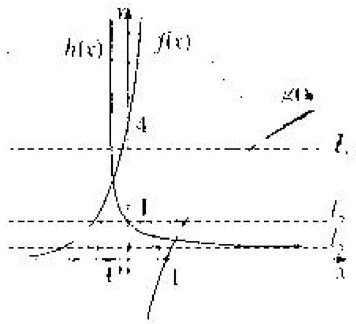
命题意图 本题考查基本不等式.

解析 依题意,$\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{a}\geqslant\lambda$. 而 $\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{a}=\frac{\left(\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{a}\right)(a+b)}{3}=\frac{\frac{a^5}{b}+\frac{b^5}{a}+a^4+b^4}{3}\geqslant\frac{2\sqrt{\frac{a^5}{b}\cdot\frac{b^5}{a}}+a^4+b^4}{3}=\frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{3}=\frac{(a^2+b^2)^2}{3}\geqslant\frac{(a+b)^4}{12}=\frac{27}{4}$,当且仅当 $a=b$,即 $a=\frac{3}{2},b=\frac{3}{2}$ 时前后两个不等号中的等号同时成立,所以 λ 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{27}{4}\right]$.

9. **答案** B

命题意图 本题考查函数的图象与性质.

解析 令函数 $f(x)=4^{x+1}$,$g(x)=\log_{\frac{3}{2}}x$,$h(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$,$m(x)=k$,在同一直角坐标系中分别作出 $y=f(x)$,$y=g(x)$,$y=h(x)$,$y=m(x)$ 的大致图象,如图所示,观察可知,可能有 $b>a>c$($m(x)$ 的图象为 l_1 时)、$b>c>a$($m(x)$ 的图象为 l_2 时)、$c>b>a$($m(x)$ 的图象为 l_3 时),故选 B.



10. **答案** D

命题意图 本题考查抛物线的方程、直线与抛物线的综合性问题.

解析 由题可知 $F(1,0)$. 设直线 A_1B_1 的方程为 $x=my+1$,联立 $\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4=0$,则根据根与系数的关系可设 $A_1(t_1^2,2t_1)$,$B_1(t_1^{-2},-2t_1^{-1})$,同理可设 $A_2(t_2^2,2t_2)$,$B_2(t_2^{-2},-2t_2^{-1})$,则直线 A_1A_2 的斜率 $k_{A_1A_2}=\frac{2}{t_1+t_2}$,直线 A_1A_2 的方程为 $y-2t_2=\frac{2}{t_1+t_2}(x-t_2^2)$,令 $y=0$,得 $x=-t_1t_2$,即直线 A_1A_2 在 x 轴上的截距为 $-t_1t_2$. 同理可得,直线 B_1B_2 在 x 轴上的截距为 $-\frac{1}{t_1t_2}$,所以直线 A_1A_2,B_1B_2 在 x 轴上的截距之积为 1.

11. **答案** A

命题意图 本题考查空间几何体的表面积与体积.

解析 设正四棱锥 $S-ABCD$ 的高为 h,其外接球的半径为 R. 因为 $R^2=(h-R)^2+2$,解得 $h=\sqrt{6}$ 或 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 当 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时,$SA=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}<2$,不符合题意;当 $h=\sqrt{6}$ 时,$SA=AC=SC=2\sqrt{2}$,所以 $\triangle SAC$ 为等边

三角形. 取 SC 的中点 E,连接 AE,则 $AE\perp SC$,且 $AE=\sqrt{6}$. 设平面 $\alpha\cap$ 直线 $SB=F$,平面 $\alpha\cap$ 直线 $SD=H$,则 $EF\perp SC$,$EH\perp SC$. 在 $\triangle SBC$ 中,由余弦定理可得 $\cos\angle BSC=\dfrac{8+8-4}{2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}$,所以 $SF=\dfrac{SE}{\cos\angle BSC}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. 在 $\triangle SBD$ 中,$FH/\!/BD$,故 $\dfrac{FH}{BD}=\dfrac{SF}{SB}=\dfrac{2}{3}$,故 $FH=\dfrac{2}{3}BD=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. 在四边形 $AFEH$ 中,$AE\perp FH$,故 $S_{AFEH}=\dfrac{1}{2}AE\cdot FH=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\dfrac{4\sqrt{2}}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. 来源:高三答案公众号

12. **答案** A

命题意图 本题考查正余弦定理、三角形的面积公式及导数的应用.

解析 记角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 因为 $\sin^2B+2\sin^2C=4\sin^2A$,所以由正弦定理可得 $\dfrac{b^2+2c^2}{4}=a^2$.

$$\left(\frac{S_{\triangle ABC}}{a^2}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{a^2}\right)^2=\frac{b^2c^2\sin^2A}{4a^4}=\frac{b^2c^2(1-\cos^2A)}{4a^4}=\frac{4b^2c^2\left[1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right]}{(b^2+2c^2)^2}=\frac{4b^2c^2\left[1-\frac{(3b^2+2c^2)^2}{64b^2c^2}\right]}{(b^2+2c^2)^2}=$$

$\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{52b^2c^2-9b^4-4c^4}{b^4+4c^4+4b^2c^2}$. 令 $t=\dfrac{c^2}{b^2}$,则 $\left(\dfrac{S_{\triangle ABC}}{a^2}\right)^2=\dfrac{1}{16}\times\left[\dfrac{8(7t-1)}{4t^2+4t+1}-1\right]$,令 $g(t)=\dfrac{7t-1}{4t^2+4t+1}$,则 $g'(t)=\dfrac{11-14t}{(2t+1)^3}$,故当 $t\in\left(0,\dfrac{11}{14}\right)$ 时,$g'(t)>0$,当 $t\in\left(\dfrac{11}{14},+\infty\right)$ 时,$g'(t)<0$,故 $g(t)_{\max}=g\left(\dfrac{11}{14}\right)=\dfrac{49}{72}$,故 $\left(\dfrac{S_{\triangle ABC}}{a^2}\right)_{\max}=\dfrac{\sqrt{10}}{6}$,则实数 λ 的取值范围为 $\left[\dfrac{\sqrt{10}}{6},+\infty\right)$.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分

13. **答案** 121

命题意图 本题考查二项式定理.

解析 $(3x-1)^2=9x^2-6x+1$,故所求 x^5 的系数为 $9\cdot C_5^2+6\cdot C_5^1+C_5^0=121$.

14. **答案** $\dfrac{3}{2}$(其他符合条件的答案也给分)

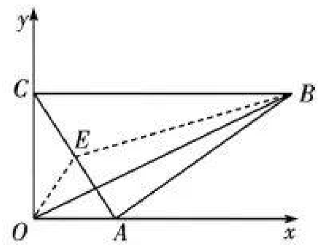
命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的对称轴相同,所以 $\dfrac{\omega\pi}{3}=-\dfrac{\omega\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,故 $\omega=\dfrac{3k}{2}(k\in\mathbf{Z})$,因为 $\omega>0$,故 $\omega=\dfrac{3k}{2}(k\in\mathbf{N}^*)$.

15. **答案** $1+\sqrt{13}$

命题意图 本题考查数学文化.

解析 如图,取 AC 的中点 E,因为 $\triangle OAC$ 为直角三角形,故 $|OE|=\dfrac{1}{2}|AC|=1$. 由于 $\triangle ABC$ 为直角三角形,故 $|BE|=\sqrt{|AB|^2+|AE|^2}=\sqrt{13}$,显然 $|OB|\leqslant|OE|+|BE|$,当且仅当 O,B,E 三点共线时等号成立,故 $|OB|$ 的最大值为 $1+\sqrt{13}$.



16. **答案** 2

命题意图 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 依题意, $f'(x)=a\ln(x+1)-2x$, 故对任意的 $x\in(-1,+\infty)$, $f'(x)=a\ln(x+1)-2x\leq 0$ 恒成立. 设 $g(x)=a\ln(x+1)-2x$, 则 $g'(x)=\dfrac{-2\left[x-\left(\frac{a}{2}-1\right)\right]}{x+1}$, 由 $a>0$ 知, $\frac{a}{2}-1>-1$, ∴ 当 $x\in\left(-1,\frac{a}{2}-1\right)$ 时, $g'(x)>0$, 当 $x\in\left(\frac{a}{2}-1,+\infty\right)$ 时, $g'(x)<0$, ∴ $g(x)$ 在 $\left(-1,\frac{a}{2}-1\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{a}{2}-1,+\infty\right)$ 上单调递减, ∴ $g(x)$ 在 $x=\frac{a}{2}-1$ 时取得最大值. 又 $g(0)=0$, ∴ 对任意的 $x\in(-1,+\infty)$, $g(x)\leq g(0)$ 恒成立, 即 $g(x)$ 的最大值为 $g(0)$, ∴ $\frac{a}{2}-1=0$, 解得 $a=2$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等差数列的通项公式、错位相减法、数列的性质.

解析 (Ⅰ) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 则 $\begin{cases}a_4+a_{12}=2a_1+14d=16,\\ S_7=7a_1+21d=28,\end{cases}$ ………………(2 分)

解得 $a_1=d=1$, ………………(3 分)

故 $a_n=n$. ………………(4 分)

(Ⅱ) 依题意, $b_n=\dfrac{4n}{3^n}$,

故 $T_n=4\cdot\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^{n-1}}+\dfrac{n}{3^n}\right)$.

则 $\dfrac{1}{3}T_n=4\cdot\left(\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{3}{3^4}+\cdots+\dfrac{n-1}{3^n}+\dfrac{n}{3^{n+1}}\right)$, ………………(5 分)

两式相减可得 $\dfrac{2}{3}T_n=4\cdot\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{n}{3^{n+1}}\right)=4\cdot\left[\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\dfrac{n}{3^{n+1}}\right]=2-\dfrac{4n+6}{3^{n+1}}$.

解得 $T_n=3-\dfrac{2n+3}{3^n}$. ………………(8 分)

故 $a_n\cdot|T_n-3|>1$ 可转化为 $\dfrac{n(2n+3)}{3^n}>1$. ………………(9 分)

令 $d_n=\dfrac{n(2n+3)}{3^n}$, 则 $d_{n+1}-d_n=\dfrac{(n+1)(2n+5)}{3^{n+1}}-\dfrac{n(2n+3)}{3^n}=\dfrac{-4n^2-2n+5}{3^{n+1}}<0$,

故 $d_{n+1}<d_n$, 即 $\{d_n\}$ 单调递减. ………………(11 分)

注意到 $d_3=1$, 所以满足条件的 n 的值为 1, 2. ………………(12 分)

18. **命题意图** 本题考查空间面面的位置关系、向量法求空间角.

解析 (Ⅰ) 因为 $SD\perp$ 平面 $ABCD$, $CM\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $SD\perp CM$. ………………(1 分)

因为 $BM=\dfrac{1}{4}AB$, 所以 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{BM}=2$. ………………(2 分)

所以 Rt$\triangle CBM\backsim$Rt$\triangle BAD$,

所以 $\angle BMC=\angle BDA$,

所以 $\angle BMC+\angle ABD=90°$, 即 $BD\perp CM$. ………………(4 分)

又 $SD\cap BD=D$, 所以 $CM\perp$ 平面 SBD. ………………

因为 $CM \subset$ 平面 SCM,故平面 $SCM \perp$ 平面 SBD. ………………………………………………(6 分)

(Ⅱ)以 D 为原点,DA,DC,DS 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,

不妨设 $AB=4$,则 $C(0,4,0)$,$S(0,0,2)$,$M(2,3,0)$,$A(2,0,0)$, ………………………………(7 分)

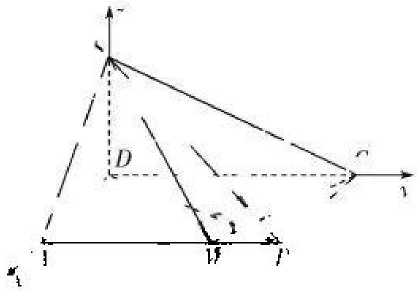
所以 $\overrightarrow{SC}=(0,4,-2)$,$\overrightarrow{CM}=(2,-1,0)$,$\overrightarrow{SA}=(2,0,-2)$. ………………………………(8 分)

设平面 SCM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CM}=2x-y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SC}=4y-2z=0,\end{cases}$

令 $x=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,2,4)$. ………………………………………………………………(10 分)

记直线 SA 与平面 SCM 所成的角为 θ,来源：高三答案公众号

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{SA},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{SA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{SA}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{6}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$. ………………………………(12 分)



19. **命题意图** 本题考查回归直线方程,离散型随机变量的分布列及数学期望.

解析 (Ⅰ)依题意,$\bar{x}=3$,$\bar{y}=\dfrac{5+8+11+11+15}{5}=10$, ………………………………(1 分)

而 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=5+16+33+44+75=173$,$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=1+4+9+16+25=55$, ………………(3 分)

故 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\dfrac{173-5\times3\times10}{55-5\times3^2}=2.3$,$\hat{a}=10-2.3\times3=3.1$, ………………(5 分)

故所求回归直线方程为 $\hat{y}=2.3x+3.1$. ………………………………………………(6 分)

(Ⅱ)依题意,X 的所有可能取值为 0,1,2,3,4. ………………………………………………(7 分)

$P(X=0)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{96}$,

$P(X=1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times C_2^1\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{96}=\dfrac{3}{32}$,

$P(X=2)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times C_2^1\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times C_2^1\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{29}{96}$,

$P(X=3)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times C_2^1\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{39}{96}=\dfrac{13}{32}$,

$P(X=4)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{18}{96}=\dfrac{3}{16}$, ………………………………(9 分)

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{96}$	$\dfrac{3}{32}$	$\dfrac{29}{96}$	$\dfrac{13}{32}$	$\dfrac{3}{16}$

……………………………………………………………………………………………………

故 $E(X)=0\times\frac{1}{96}+1\times\frac{3}{32}+2\times\frac{29}{96}+3\times\frac{13}{32}+4\times\frac{3}{16}=\frac{8}{3}$. ……（12 分）

20. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 （Ⅰ）由题可知 $m(x)=\frac{e^x}{x}-x+\frac{x^2}{2},x\neq0$,

则 $m'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}+(x-1)=(x-1)\left(\frac{e^x}{x^2}+1\right)$, ……（2 分）

故当 $x<0$ 时,$m'(x)<0$,当 $0<x<1$ 时,$m'(x)<0$,当 $x>1$ 时,$m'(x)>0$, ……（3 分）

故 $m(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……（4 分）

（Ⅱ）依题意,当 $x\geqslant0$ 时,$e^x-\cos x-x^2-2ax\geqslant0(*)$恒成立.

令 $g(x)=e^x-x^2-2ax-\cos x,x\in[0,+\infty)$,则 $g'(x)=e^x-2x-2a+\sin x$. ……（5 分）

令 $h(x)=e^x-2x-2a+\sin x,x\in[0,+\infty)$,则 $h'(x)=e^x+\cos x-2$.

令 $r(x)=e^x+\cos x-2,x\in[0,+\infty)$,则 $r'(x)=e^x-\sin x>0$,故 $r(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

则 $r(x)\geqslant r(0)=0$,故 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,则 $h(x)\geqslant h(0)=1-2a$. ……（7 分）

当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$h(x)\geqslant h(0)=1-2a\geqslant0$,此时 $g(x)$ 单调递增,从而 $g(x)\geqslant g(0)=0$,满足题意. ……（8 分）

当 $a>\frac{1}{2}$ 时,令 $s(x)=e^x-ex$,则 $s'(x)=e^x-e$,

当 $x\in(-\infty,1)$ 时,$s'(x)<0$,$s(x)$ 单调递减,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$s'(x)>0$,$s(x)$ 单调递增,

所以 $s(x)\geqslant s(1)=0$,即 $e^x\geqslant ex$,当且仅当 $x=1$ 时取等号.

所以 $g'(x)=e^x-2x-2a+\sin x>(e-2)x-1-2a$,

从而 $g'\left(\frac{1+2a}{e-2}\right)>(e-2)\cdot\frac{1+2a}{e-2}-1-2a=0$. ……（10 分）

又 $g'(0)=1-2a<0$,$g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,故存在唯一的实数 $x_0\in\left(0,\frac{1+2a}{e-2}\right)$,使得 $g'(x_0)=0$,

且当 $x\in(0,x_0)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时,$g(x)<g(0)=0$,不合题意,舍去. ……（11 分）

综上所述,实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$. ……（12 分）

21. **命题意图** 本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的综合性问题.

解析 （Ⅰ）设椭圆 C 的半焦距为 $c(c>0)$.

依题意,$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$①. ……（1 分）

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ x=c,\end{cases}$ 解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$,故 $|MN|=\frac{2b^2}{a}=2\sqrt{2}$②. ……（3 分）

联立①②,解得 $a=2\sqrt{2},b=2$,

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……（4 分）

（Ⅱ）易知椭圆的右焦点为 $(2,0)$.

设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)(k\neq0)$.

由 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ x^2+2y^2=8\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-8=0$, ……（5 分）

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{8k^2-8}{1+2k^2}$. ……………………………………………… (7 分)

因为 $MP\perp x$ 轴，所以 $P(x_1,0)$.

直线 NP 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-x_1}(x-x_1)$，所以 $R\left(4,\dfrac{y_2(4-x_1)}{x_2-x_1}\right)$. ……………………………………………… (8 分)

因为 $NQ\perp x$ 轴，所以 $Q(x_2,0)$. 来源：高三答案公众号

因为 $k_{MQ}=\dfrac{y_1}{x_1-x_2}$，$k_{RQ}=\dfrac{y_2(4-x_1)}{(x_2-x_1)(4-x_2)}$， ……………………………………………… (9 分)

所以 $k_{RQ}-k_{MQ}=\dfrac{y_2(4-x_1)}{(x_2-x_1)(4-x_2)}-\dfrac{y_1}{x_1-x_2}$

$=\dfrac{k(x_2-2)(4-x_1)+k(x_1-2)(4-x_2)}{(x_2-x_1)(4-x_2)}$

$=\dfrac{k}{(x_2-x_1)(4-x_2)}\cdot[6(x_1+x_2)-2x_1x_2-16]$

$=\dfrac{2k}{(x_2-x_1)(4-x_2)}\cdot\left(\dfrac{24k^2}{1+2k^2}-\dfrac{8k^2-8}{1+2k^2}-8\right)$

$=\dfrac{16k}{(x_2-x_1)(4-x_2)}\cdot\dfrac{3k^2-k^2+1-1-2k^2}{1+2k^2}$

$=0$，

所以 Q,M,R 三点共线. ……………………………………………… (11 分)

因为 $NQ /\!/ PM$，所以 $S_{\triangle PQM}=S_{\triangle PMN}$，

而 $S_{\triangle PMR}=S_{\triangle PMR}$，

所以 $\triangle RMN$ 与 $\triangle RPQ$ 的面积相同. ……………………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查参数方程、极坐标方程、普通方程、直角坐标方程之间的转化.

解析 （Ⅰ）由直线 l 的参数方程可得直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x+y=6$，

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入得 $\sqrt{3}\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=6$，

故直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=3$. ……………………………………………… (3 分)

而曲线 $C:\rho(1+\cos 2\theta)=2\sin\theta$，即 $2\rho\cos^2\theta=2\sin\theta$，则 $\rho^2\cos^2\theta=\rho\sin\theta$，

故曲线 C 的直角坐标方程为 $y=x^2$. ……………………………………………… (5 分)

（Ⅱ）由 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y-6=0,\\ y=x^2,\end{cases}$

可得 $\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2\sqrt{3},\\ y=12.\end{cases}$ ……………………………………………… (7 分)

因为 $|OM|<4$，所以点 $M(\sqrt{3},3)$，转化为极坐标为 $M\left(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$. ……………………………………………… (8 分)

由于点 P 的极坐标为 $\left(8,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

故 $\triangle OMP$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 8\times\sin\dfrac{\pi}{3}=12$. ……………………………………………… (10 分)

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的求解.

解析 （Ⅰ）依题意，$|2x+3|+|x-4|>7$.

当 $x<-\frac{3}{2}$ 时，$-2x-3+4-x>7$，解得 $x<-2$，故 $x<-2$；…………（2 分）

当 $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 4$ 时，$2x+3+4-x>7$，解得 $x>0$，故 $0<x\leqslant 4$；…………（3 分）

当 $x>4$ 时，$2x+3+x-4>7$，解得 $x>\frac{8}{3}$，故 $x>4$. …………（4 分）

综上所述，不等式 $f(x)>7$ 的解集为 $\{x\mid x<-2$ 或 $x>0\}$. …………（5 分）

（Ⅱ）依题意，$f(x)=|2x+m|+|x-4|\geqslant\left|x+\frac{m}{2}\right|+|x-4|\geqslant\left|\frac{m}{2}+4\right|$，

当 $x=-\frac{m}{2}$ 时，取"="，故 $f(x)_{\min}=\left|\frac{m}{2}+4\right|$. …………（7 分）

$g(x)=2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1$. …………（8 分）

因为 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$ 成立，故 $\left|\frac{m}{2}+4\right|\geqslant 1$，

故 $\frac{m}{2}+4\leqslant -1$ 或 $\frac{m}{2}+4\geqslant 1$，则 $m\leqslant -10$ 或 $m\geqslant -6$，

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-10]\cup[-6,+\infty)$. …………（10 分）