

河南省信阳高级中学 2022-2023 学年高三下期 02 月测试

数学（文科）

注意事项：

1. 本试卷共 6 页。时间 120 分钟，满分 150 分。答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在试卷指定位置，并将姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上，然后认真核对条形码上的信息，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。作答非选择题时，将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将试卷和答题卡一并收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 已知全集 $U = \{x | \log_5 x > 0\}$ ，集合 $A = \{x | x - 2 > 0\}$ ，则 $C_U A =$

- A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, 2)$ C. $[1, 2]$ D. $(1, 2)$

2. 已知复数 z 满足 $z(4-3i) = 2+i$ ，则 z 的共轭复数在复平面内对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 2022 年秋，某京剧演员因疫情原因无法演出，在短视频平台开设自己的账号，不断直播京剧知识。初始直播时已有 50 名粉丝，经过 x 天后，粉丝人数 $F(x)$

满足关系式： $F(x) = M \cdot e^k (x \geq 0)$ ，其中 M, k 为常数。若开播 10 天后有 200 名粉

丝，则开播 30 天后预计该京剧演员在平台上的粉丝数量为

- A. 600 B. 800 C. 3200 D. 3400

4. 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_5 a_{10} = 8a_3$ ，且 $a_3 = 1$ ，则 $S_5 =$

- A. 96 B. $\frac{31}{4}$ C. 72 D. -72

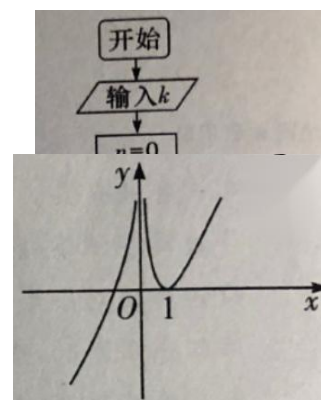
5. 执行如图所示的程序框图，若输入 k 的值为 1，则输出 n 的值为

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

6. 如图所对应的函数的解析式可能是

- A. $f(x) = (x-1) \ln |x|$ B. $f(x) = x \ln |x|$
C. $f(x) = (x-1) \ln x$ D. $f(x) = (x-1)e^x (x \neq 0)$

7. 已知函数 $f(x) = 2 \sin x + \cos x$ ，若 $\exists \theta \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(\theta)$ ，则 $\tan 2\theta =$



- A. 2 B. $\frac{4}{3}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -2

8. 已知圆 O 为长方形 $ABCD$ 的外接圆, $AB=2, AD=1$, 若点 P 是该圆上一动点, 则 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) =$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 与双曲线 C 交于 A, B 两点 (点 A 在第二象限), 且 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$,

则双曲线 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{13}+1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$ D. $\sqrt{5}$

10. 已知函数 $f(x) = 4\cos\left(2x + \frac{7}{\varphi}\right) \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 T . 若

$f\left(\frac{T}{8}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{6}$, 则 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

- A. -2 B. 2 C. $-2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

11. 某车间生产一种圆台形零件, 其下底面的直径为 4, 上底面的直径为 8, 已知 AB 为上底面的直径, 圆台的高 $h=4$, 点 P 是上底面圆周上一点, 且

$AP=BP, PC$ 是该圆台的一条母线, 则点 P 到平面 ABC 的距离为

- A. $\frac{8\sqrt{5}}{15}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

12. 已知过点 $(2, b)$ 不可能作曲线 $y = 2e^x$ 的切线, 对于满足上述条件的任意的

b , 函数 $f(x) = \frac{a^x}{\ln a} - \frac{b}{2}x^2 + e^2x + 1 (a > 1)$ 恒有两个不同的极值点, 则 a 的取值范围是

- A. $(1, e^2]$ B. $(e, e^2]$ C. $[e, e^2)$ D. $(1, e^2)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y-6 \leq 0 \\ x-y \geq 0 \\ y+1 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x-2y$ 的最小值为: _____.

14. 在平面直角坐标系中, 设抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 准线为 l , P 为抛物线上一点, 过点 P 作 $PA \perp l$, 交准线 l 于点 A . 若 $|PF| = |AF|$, 则 $|OP| =$ _____.

15. 若一个数列的后项与其相邻的前项的差值构成的数列为等差数列, 则称此数列为二阶等差数列. 现有二阶等差数列: $2, 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, \dots$, 设此数列为

$\{a_n\}$, 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_{n+1} - 2}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.

16. 已知平面内三点 $A(-1, 0), B(1, 0), C(0, -1)$, P 为该平面内一动点, 且满足

$\frac{|PA|}{|PB|} = 2$, 则 $\angle PAC$ 最大值的余弦值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2}, b \cos A = \frac{1}{2}$.

(1) 求 $\tan A$;

(2) 若 $a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

2023 年元旦, 某鞋店搞促销, 进行降价销售, 在该天累计到店的人员有 100 人, 经评估后将到店人员分为购买组和观察组, 统计到店人员的分布如下表:

	60 岁以下	60 岁及以上	总计
购买组的人数	20	10	30
观察组的人数	60	10	70
总计	80	20	100

(1) 是否有 95% 的把握认为到店人员是否购买与年龄有关?

(2) 现从购买组的人中按分层抽样的方法 (各层按比例分配) 抽取 6 人, 再从这 6 人中随机抽取 2 人, 求这 2 人全部为 60 岁以下的概率.

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \leq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

19. (本小题满分 12 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle ADC = 120^\circ$, $ED \perp$ 平面

$ABCD$, $FB \parallel ED$. $AB = ED$, 设 $FB = \lambda ED (0 < \lambda < 1)$, 连接 AC, BD 交于点 M ,

连接 EM, FM .

(1) 试问是否存在实数 λ , 使得 $EM \perp$ 平面 AFC ? 若存在, 请求出 λ 的值, 并写出求解过程, 若不存在, 请说明理由.

(2) 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 求异面直线 EM 与 FC 所成角的余弦值.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $Q(x_0, 1)$ 在椭圆

上且位于第一象限, $\triangle QF_1F_2$ 的面积为 $\sqrt{6}$, $\overline{QF_1} \cdot \overline{QF_2} = -1$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若 M, N 是椭圆 C 上异于点 Q 的两动点, 记 QM, QN 的倾斜角分别为

α, β , 当 $\alpha + \beta = \pi$ 时, 试问直线 MN 的斜率是否为定值? 若是, 请求出该定值; 若不是, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1 (a \in \mathbf{R})$ 的最小值为 0.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 设 $m_1 = 1.1 + \ln 0.1, m_2 = 0.1e^{0.1}, m_3 = \frac{1}{9}$, 判断 m_1, m_2, m_3 的大小.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} y = t, \\ x = 2(t - 2\sqrt{2}) \end{cases}$ (t 为参

数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 C .

(1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若射线 $\theta = \beta$ (其中 $\beta \in (0, \pi)$, 且 $\tan \beta = -\frac{1}{2}, \rho \geq 0$) 与曲线 C 在 x 轴上方交于点 M , 与直线 l 交于点 N , 求 $|MN|$.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$, 且 $a + b = 2$.

(1) 证明: $a^2 + b^2 \geq 2$;

(2) 若 $b > 0, a \neq 0$, 求 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{2(b+2)}$ 的最小值.