# 数学参考答案

1. A　$A=\{x\mid 2x^2-x-3<0\}=\left\{x\,\middle|\,-1<x<\frac{3}{2}\right\}$,

$B=\{y\mid y=2-3x+x^2\}=\left\{y\,\middle|\,y\geqslant-\frac{1}{4}\right\}$,

所以 $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$,故选 A.

2. C　因为复数 $z_1=1+a\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$,$z_2=\frac{13}{3-2\mathrm{i}}=3+2\mathrm{i}$,且 $|z_1|\leqslant|z_2|$,

所以 $a^2+1\leqslant3^2+2^2$,解得 $-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant2\sqrt{3}$,所以 $a$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$. 故选 C.

3. D　因为命题 $p$:$\exists x\in\mathbf{R}$,$\tan x<\pi$ 或 $\mathrm{e}^{x+2}\geqslant\pi$ 是存在量词命题,所以命题 $p$ 的否定为 $\forall x\in\mathbf{R}$,$\tan x\geqslant\pi$ 且 $\mathrm{e}^{x+2}<\pi$. 故选 D.

4. B　$a_6-6a_5+9a_4=0$,$q^2-6q+9=0$,$q=3$,$a_1+a_2+a_3=a_1+3a_1+9a_1=13a_1=39$,$a_1=3$,$\therefore a_n=3^n$,$a_5=3^5=243$. 故选 B.

5. A　事件 $AB$:甲同学选篮球且五名同学所选项目各不相同,所以其他 4 名同学排列在其他 4 个项目,且互不相同为 $A_4^4$,事件 $B$:甲同学选篮球,所以其他 4 名同学排列在其他 4 个项目,可以安排在相同项目为 $4^4$,

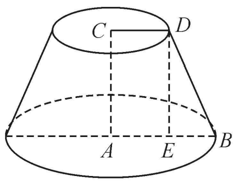
$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{A_4^4}{5^5}}{\frac{4^4}{5^5}}=\frac{3}{32}$. 故选 A.

6. C　如图,设圆台上、下底面圆心分别为 $C$,$A$,半径分别为 $CD$,$AB$,

由题意得 $CD:AB=1:2$,即 $AB=2CD$,

因为圆台的轴截面面积为 9,

所以 $\frac{1}{2}(2AB+2CD)AC=9$,所以 $AC\cdot CD=3$,




过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$,

所以 $BD=\sqrt{AC^2+(AB-CD)^2}=\sqrt{AC^2+CD^2}$,

因为母线长为上底面圆的半径的 $\sqrt{10}$ 倍,

所以 $10CD^2=AC^2+CD^2$,即 $AC=3CD$,

所以 $AC=3$,$CD=1$,所以 $AB=2$,

所以圆台的体积 $V=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}\ S_{下}})h=\frac{1}{3}(\pi+4\pi+\sqrt{\pi\times4\pi})\times3=7\pi$,故选 C.

7. D　因为 $f(x)=\sin(2023\pi+x)-\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=-\sin x+\cos x=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,

所以 $f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $f(x)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,故选项 A 正确;

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 得 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$,故选项 B 正确;

所以 $f\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$,

所以 $y=f\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$ 为奇函数,故选项 C 正确;

由$-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$得$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant-\frac{1}{2}$，

即$-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant-\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以$-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以不等式$f(x)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$的解集为$\left[-\frac{7\pi}{12}+2k\pi,\frac{\pi}{12}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，故选项D错误.故选D.

8.C　因为$f(x)=\frac{1}{4}ax^4-\frac{1}{2}x^2$，所以$f'(x)=ax^3-x$，

依题意$f'(t+2)-f'(t)=[a(t+2)^3-(t+2)]-(at^3-t)=2a(3t^2+6t+4)-2$，

因为存在$t\in\mathbf{R}$，使得$|f'(t+2)-f'(t)|\leqslant\frac{1}{4}$，

所以$|2a(3t^2+6t+4)-2|\leqslant\frac{1}{4}$，即$-\frac{1}{4}\leqslant2a(3t^2+6t+4)-2\leqslant\frac{1}{4}$有解，

因为$t\in\mathbf{R}$，则$3t^2+6t+4=3(t+1)^2+1\geqslant1$，

所以$\frac{7}{8(3t^2+6t+4)}\leqslant a\leqslant\frac{9}{8(3t^2+6t+4)}$有解，

所以$a\leqslant\left[\frac{9}{8(3t^2+6t+4)}\right]_{\max}$，

因为$3t^2+6t+4\geqslant1$，所以$0<\frac{1}{3t^2+6t+4}\leqslant1$，

所以$\frac{9}{8(3t^2+6t+4)}\leqslant\frac{9}{8}$，

所以$a$的最大值为$\frac{9}{8}$.此时$f(x)=\frac{9}{32}x^4-\frac{1}{2}x^2=\frac{9}{32}\left(x^2-\frac{8}{9}\right)^2-\frac{2}{9}\geqslant-\frac{2}{9}$.

所以$f(x)$的最小值为$-\frac{2}{9}$，故选C.

9.ACD　对于A，由正方体的性质知，$BB_1$//平面$ACC_1A_1$，

所以$BB_1$上的任意一点到平面$ACC_1A_1$的距离恒为定值，故选项A正确；

对于B，由正方体的性质知，$AB//CD$，

所以直线$AP$与$CD$所成角即为直线$AP$与$AB$所成角，

因为点$P$在四边形$ACC_1A_1$内(含四边形的边)运动，

所以直线$AP$与$AB$所成角的最大值为$\frac{\pi}{2}$，最小值为$\frac{\pi}{4}$，

所以直线$AP$与$CD$所成角的正弦值的范围为$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，故选项B错误；

对于C，因为$4\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC_1}$，所以点$P$是$AC_1$上靠近$A$的四等分点，

过点$P$作平面$CDD_1C_1$的垂线，垂足为$Q$

由正方体的性质知，$Q$是$DC_1$靠近$D$的四等分点，连接$CQ$，

则$\angle PCQ$为直线$CP$与平面$CDD_1C_1$所成的角，

在$\mathrm{Rt}\triangle PCQ$中，易得$PQ=\frac{3}{4}$，$CQ=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-2\times1\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

所以$\tan\angle PCQ=\frac{PQ}{CQ}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故选项C正确；

对于D，因为点$P$在四边形$ACC_1A_1$内(含四边形的边)运动，

当$P$点在$A_1$或$C_1$点时，其外接球的体积最大为正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的外接球的的体积，当$P$点不在

$A_1$ 或 $C_1$ 时，其外接球体积较小，故 D 正确. 故选 ACD.

10. ABD　对于 A，因为 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，所以 $f'(x)=e^x-x$，

所以 $f(0)=1,f'(0)=1$，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-1=x-0$，即 $x-y+1=0$，故选项 A 正确；

对于 B，因为 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，所以 $f(\ln 2)=e^{\ln 2}-\frac{1}{2}\ln^2 2=2-\frac{1}{2}\ln^2 2$，

因为 $0<\ln 2<1$，所以 $\frac{3}{2}<f(\ln 2)<2$，故选项 B 正确；

对于 C，因为 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，

函数 $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于坐标原点对称，

所以 $g(x)=-\left[e^{-x}-\frac{1}{2}(-x)^2\right]=-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2$，故选项 C 错误；

对于 D，因为 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，所以 $f'(x)=e^x-x$，所以 $f''(x)=e^x-1$，

令 $f''(x)=e^x-1=0$ 得 $x=0$，令 $f''(x)=e^x-1>0$ 得 $x>0$，令 $f''(x)=e^x-1<0$ 得 $x<0$，

所以 $f'(x)=e^x-x$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)$ 的极小值为 $f'(0)=1$，即 $f'(x)_{\min}=1>0$，

所以 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

因为 $f(0)=1>0,f(-1)=\frac{1}{e}-\frac{1}{2}<0$，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内存在唯一零点，

所以 $f(x)$ 有唯一零点，故选项 D 正确. 故选 ABD.

11. BCD　对于 A，因为随机变量 $X\sim B\left(a,\frac{1}{2}\right)$，$E(X)=a\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $a=3$. 故选项 A 错误；

对于 B，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3x^2\right)^8$ 中，令 $x=1$ 得 $(1-3)^8=256$，故选项 B 正确；

对于 C，当 $a=3$ 时，$T_{r+1}=C_8^r\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-r}\cdot(-3x^2)^r=(-3)^r\cdot C_8^r\cdot x^{-4+\frac{5}{2}r}$，其中 $r$ 为整数，且 $0\leqslant r\leqslant 8$，

令 $-4+\frac{5}{2}r=1$，解得 $r=2$，所以二项式 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$ 的展开式中含 $x$ 项的系数为 $(-3)^2\cdot C_8^2=252$，故选项 C 正确；

对于 D，由选项 C 知二项式 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$ 的展开式中含 $x$ 项的系数为 $(-3)^2\cdot C_8^2=252$，

令 $-4+\frac{5}{2}r=6$，解得 $r=4$，所以二项式 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$ 的展开式中含 $x^6$ 项的系数为 $(-3)^4\cdot C_8^4=5670$，

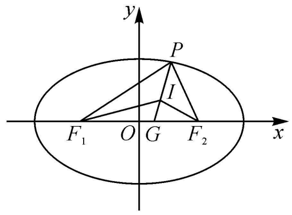
所以 $(1-x^5)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$ 的展开式中含 $x^6$ 项的系数为 $5670-252=5418$，故选项 D 正确. 故选 BCD.

12. ABD　根据题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{3},\\ 2b=4\sqrt{2},\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3,\\ b=2\sqrt{2},\\ c=1,\end{cases}$ 对于 A，点 $P$ 到椭圆 $C$ 的焦点的最大距离为 $a+c=4$，故选项 A 正确；

对于 B，若 $\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$，所以 $PF_2\perp F_1F_2$，则 $|PF_2|=\frac{8}{3}$，故选项 B 正确；

对于 C,依题意$\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为$\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot b=bc$,$b=2\sqrt{2}$,$c=1$,所以 $bc=2\sqrt{2}$,故选项 C 错误;

对于 D,连接 $PI$ 并延长交 $x$ 轴于 $G$,因为 $I$ 到$\triangle PF_1F_2$ 三边的距离相等,




则由内角平分线定理可得$\frac{|F_1G|}{|PF_1|}=\frac{|GI|}{|IP|}$,$\frac{|F_2G|}{|PF_2|}=\frac{|GI|}{|IP|}$,

所以$\frac{|GI|}{|IP|}=\frac{|F_1G|+|F_2G|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{c}{a}=\mathrm{e}$.

设 $P(x_0,y_0)$,$I(x_I,y_I)$,$G(x_G,0)$,则$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,所以$\frac{a^2y_0^2}{a^2-x_0^2}=b^2$,

所以$\frac{y_I}{y_0}=\frac{c}{a+c}$,则 $y_I=\frac{cy_0}{a+c}$,又$\frac{c-x_G}{x_G+c}=\frac{a-\mathrm{e}x_0}{a+\mathrm{e}x_0}$,则 $x_G=\mathrm{e}^2x_0$.

所以$\frac{x_I-x_G}{x_0-x_G}=\frac{c}{a+c}$,则 $x_I=\mathrm{e}x_0$,所以 $k_{IF_1}=\frac{y_I}{x_I+c}$,所以 $k_{IF_2}=\frac{y_I}{x_I-c}$,

则 $k_{IF_1}\cdot k_{IF_2}=-\frac{\frac{c^2y_0^2}{(a+c)^2}}{c^2-\frac{c^2}{a^2}x_0^2}=\frac{1}{(a+c)^2}\cdot\frac{a^2y_0^2}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2}{(a+c)^2}=-\frac{1}{2}$,

所以直线 $IF_1$ 和直线 $IF_2$ 的斜率之积是定值.故选项 D 正确.故选 ABD.

13.$\frac{\sqrt{14}}{2}$　因为数据 1,2,$a$,6 的平均数是 3,所以 $3=\frac{1+2+a+6}{4}$,解得 $a=3$,

若将这组数据中每一个数据都加上 2023,则新数据的平均数为 $\bar{x}=2026$,

方差为 $s^2=\frac{1}{4}\times[(2024-2026)^2+(2025-2026)^2+(2026-2026)^2+(2029-2026)^2]=\frac{14}{4}$.

所以新数据的标准差为$\frac{\sqrt{14}}{2}$.

14.$10\sqrt{6}+\sqrt{123}$　设 $P(x,y)$,由阿氏圆的定义可得$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

即$\frac{(x+3)^2+(y-1)^2}{(x+3)^2+(y-6)^2}=\frac{2}{3}$,化简得 $x^2+y^2+6x+18y-60=0$,

所以$(x+3)^2+(y+9)^2=150$,所以点 $P$ 在圆心为$(-3,-9)$,半径为 $5\sqrt{6}$的圆上,

因为抛物线 $C:y=\frac{1}{6}x^2$ 的焦点为 $F$,所以 $F\left(0,\frac{3}{2}\right)$,

因为$(0+3)^2+\left(\frac{3}{2}+9\right)^2=\frac{477}{4}<150$,所以点 $F$ 在圆$(x+3)^2+(y+9)^2=150$ 内,

因为点 $F$ 到与圆心的距离为$\sqrt{\frac{477}{4}}=\frac{\sqrt{477}}{2}$,

所以过点 $F$ 的最短弦长为 $2\sqrt{150-\frac{477}{4}}=\sqrt{123}$,过点 $F$ 的最长弦长为 $2\sqrt{150}=10\sqrt{6}$,

所以过点 $F$ 的最长弦与最短弦的和为 $10\sqrt{6}+\sqrt{123}$.

15.$[4\sqrt{3}-4,+\infty)$　因为 $f(x)=3x^2-xf'(1)+2\ln x$,所以 $f'(x)=6x-f'(1)+\frac{2}{x}$,

所以 $f'(1)=6-f'(1)+2$,所以 $f'(1)=4$,

所以 $f(x)=3x^2-4x+2\ln x(x>0)$,

所以 $f'(x)=6x-4+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{6x\cdot\frac{2}{x}}-4=4\sqrt{3}-4$,当且仅当 $6x=\frac{2}{x}$,即 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立,

所以 $f'(x)$的最小值为 $4\sqrt{3}-4$,

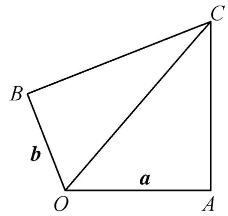
所以 $f(x)$的图象上任意一点处的切线的斜率的取值范围为$[4\sqrt{3}-4,+\infty)$.

16. $\frac{5}{2}\pi$ 因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，

又因为 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\cos\langle\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，$\langle\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角大小为 $\frac{3\pi}{4}$，$\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\pi}{4}$，

如图，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，




连接 $AC$，$BC$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CB}$，所以 $\angle ACB=\frac{\pi}{4}$，

又 $\angle AOB=\frac{3\pi}{4}$，所以 $O,A,C,B$ 四点共圆，

故当 $OC$ 为圆的直径时，$|\boldsymbol{c}|$ 最大，

此时 $A=B=\frac{\pi}{2}$，$OA=\sqrt{2}$，$OB=1$，$\angle BOC=\frac{3\pi}{4}-\angle AOC$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，$OC=\frac{OA}{\cos\angle AOC}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOC$ 中，$OC=\frac{OB}{\cos\angle BOC}$，

所以 $\frac{OA}{\cos\angle AOC}=\frac{OB}{\cos\angle BOC}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{\cos\angle AOC}=\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\angle AOC\right)}$，

所以 $\cos\angle AOC=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\angle AOC+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\angle AOC\right)$，

整理得 $2\cos\angle AOC=\sin\angle AOC$，

所以 $\tan\angle AOC=2$，$\cos\angle AOC=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

所以 $OC=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=\sqrt{10}$，即 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 $\sqrt{10}$.

所以以 $|\boldsymbol{c}|$ 为直径的圆的面积的最大值为 $\pi\times\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\pi$.

17. 解：(1)因为 $2c\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)+b\cos\frac{C}{2}=c$，

所以 $b\cos\frac{C}{2}=c\left[1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right]$，即 $b\cos\frac{C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)c$，

由正弦定理得 $\sin B\cos\frac{C}{2}=\sin C\sin B$，…………………………………………………………………… 3 分

因为 $B,C\in(0,\pi)$，则 $\sin B>0$，$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{C}{2}>0$，

所以 $\cos\frac{C}{2}=\sin C$，则 $\cos\frac{C}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$，

所以 $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$，$\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，则 $C=\frac{\pi}{3}$；…………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知，$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由正弦定理可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}a}{2c}$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}b}{2c}$，

所以 $\sin A\sin B=\frac{3ab}{4c^2}$，

由余弦定理可得 $a^2+b^2-ab=c^2$，…………………………………………………………………………… 8 分

由基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取等号)，可得 $c^2\geqslant ab$，

所以 $\sin A\sin B=\frac{3ab}{4c^2}\leqslant\frac{3ab}{4ab}=\frac{3}{4}$，

故 $\sin A\sin B$ 的最大值为$\frac{3}{4}$. ………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)令 $n=1$，$S_1=a_1=\left(\frac{1}{2}+t\right)$，可得 $t=\frac{1}{2}$，所以 $S_n=\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)n$， ……………………………… 2 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=\left[\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{2}\right](n-1)$，可得 $a_n=\frac{1}{2}[n^2-(n-1)^2]+\frac{1}{2}=n$，

所以 $a_n=n(n\geqslant 2)$，

又因为 $a_1=1$ 满足上式，所以 $a_n=n$； ………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $b_n=a_n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{a_n+1}=n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$， ………………………………………………………… 6 分

所以 $T_n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots+n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$， ……………………………… 7 分

两边乘$\frac{1}{4}$得$\frac{1}{4}T_n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^5+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$，

………………………………………………………………………………………………………… 8 分

两式相减得$\frac{3}{4}T_n=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\left(\frac{1}{4}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$

$=\frac{\frac{1}{16}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}-n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$， ………………………………………………………… 10 分

所以 $T_n=\frac{1}{9}-\left(\frac{1}{9}+\frac{n}{12}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$. ………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为 $A$ 为事件"选出的 2 人参加义工活动次数之和为 4"，

所以事件 $A$ 发生的概率 $P(A)=\frac{C_3^1C_4^1+C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}$； ………………………………………………………… 4 分

(2)$X$ 的可能取值为 0,1,2，

$P(X=0)=\frac{C_3^2+C_3^2+C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{4}{15}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^1+C_3^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_3^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{4}{15}$.

………………………………………………………………………………………………………… 8 分

所以随机变量 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{4}{15}$ |

所以 $E(X)=0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{4}{15}=1$. ………………………………………………………… 10 分

$D(X)=(0-1)^2\times\frac{4}{15}+(1-1)^2\times\frac{7}{15}+(2-1)^2\times\frac{4}{15}=\frac{8}{15}$. ……………………………………………… 12 分

20. (1)证明：连接 $AC$，$\because ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 是正六棱柱，棱长为 2，

$\therefore AF/\!/BE$，$BE\perp C_1C$，$AF=2$，$AC=2\sqrt{3}$，$FC=2AF=4$， ……………………………………… 2 分

又$\because AF^2+AC^2=FC^2$，$\therefore AF\perp AC$，$BE\perp AC$，……………………………………………………… 3 分

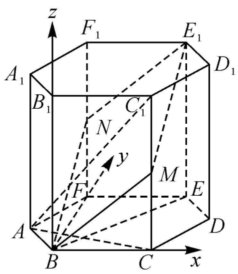
又$\because CC_1\cap AC=C$，$CC_1$、$AC\subset$平面 $AC_1C$，

$\therefore BE\perp$平面 $AC_1C$，又$\because AC_1\subset$平面 $AC_1C$， ……………………………………………… 5 分

$\therefore BE\perp AC_1$； ………………………………………………………………………………… 6 分

(2)解：以 $B$ 为坐标原点，$BC$，$BF$，$BB_1$，分别为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴，建立空间直角坐标系，

因为正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的所有棱长为 2，$M$，$N$ 分别为 $CC_1$，$FF_1$ 的中点. 所以 $B(0,0,0)$，




$M(2,0,1)$，$N(0,2\sqrt{3},1)$，$E(2,2\sqrt{3},0)$，$F_1(0,2\sqrt{3},2)$，

所以$\overrightarrow{BM}=(2,0,1)$，$\overrightarrow{BN}=(0,2\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{BE}=(2,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BF_1}=(0,2\sqrt{3},2)$， …… 7 分

设平面 $BME_1N$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BN}=(x,y,z)\cdot(0,2\sqrt{3},1)=2\sqrt{3}y+z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BM}=(x,y,z)\cdot(2,0,1)=2x+z=0,\end{cases}$

令 $z=2\sqrt{3}$，则 $x=-\sqrt{3}$，$y=-1$，即 $\boldsymbol{m}=(-\sqrt{3},-1,2\sqrt{3})$.

设平面 $BEF_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=(x_1,y_1,z_1)\cdot(2,2\sqrt{3},0)=2x_1+2\sqrt{3}y_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF_1}=(x_1,y_1,z_1)\cdot(0,2\sqrt{3},2)=2\sqrt{3}y_1+2z_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=\sqrt{3}$，则 $x_1=\sqrt{3}$，$y_1=-1$，即 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$. …… 9 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{(-\sqrt{3},-1,2\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})}{4\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$， …… 10 分

设平面 $BME_1N$ 与平面 $BEF_1$ 所成角为 $\theta$，

则 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{7}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

所以平面 $BME_1N$ 与平面 $BEF_1$ 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. …… 12 分

21. 解：(1)因为 $f(x)=\ln(x+1)-2x+x^2$ 的定义域为$(-1,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-2+2x=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$， …… 2 分

令$\dfrac{2x^2-1}{x+1}=0$ 得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；令$\dfrac{2x^2-1}{x+1}>0$ 得 $x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；令$\dfrac{2x^2-1}{x+1}<0$ 得$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$； …… 4 分

(2)因为 $f(x)=\ln(x+1)-2x+x^2$，

$f(x)+2\leqslant x^2+(a+1)x+b$ 在 $x\in(-1,+\infty)$上恒成立，

即 $b\geqslant\ln(x+1)-(a+3)x+2$ 在 $x\in(-1,+\infty)$上恒成立， …… 6 分

设 $g(x)=\ln(x+1)-(a+3)x+2(x>-1)$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-(a+3)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{(a+3)(x+1)}{x+1}=\dfrac{-(a+3)x-(a+2)}{x+1}$. …… 7 分

①若 $a+3\leqslant0$，则 $g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，$g(x)$的值域为 $\mathbf{R}$，

故 $b\geqslant\ln(x+1)-(a+3)x+2$ 不能恒成立，故舍去； …… 9 分

②若 $a+3>0$，则当 $x\in\left(-1,-\dfrac{a+2}{a+3}\right)$时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(-\dfrac{a+2}{a+3},+\infty\right)$时，$g'(x)<0$，

从而 $g(x)$在$\left(-1,-\dfrac{a+2}{a+3}\right)$上单调递增，在$\left(-\dfrac{a+2}{a+3},+\infty\right)$上单调递减，

所以 $g(x)$有最大值 $g\left(-\dfrac{a+2}{a+3}\right)=a+4-\ln(a+3)$，

所以 $b\geqslant a+4-\ln(a+3)$. …… 12 分

22. 解：(1)因为点$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4},1\right)$在双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$上，所以$\dfrac{18}{16a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1$，

又离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=3$，即 $b^2=8a^2$，

所以 $a^2=1$，$b^2=8$，

所以双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$； ………………………………………………………… 4分

(2)设 $P\left(\frac{1}{3},t\right)$，因为 $A,B$ 分别为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 的左，右顶点，所以 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，

所以直线 $PA$ 的方程为 $y=\frac{3t}{4}(x+1)$.

由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{8}=1,\\ y=\frac{3t}{4}(x+1),\end{cases}$ 消去 $y$ 得 $(128-9t^2)x^2-18t^2x-9t^2-128=0$. ………………………… 5分

因为直线 $PA$ 与双曲线交于点 $A,M$，所以 $128-9t^2\neq0$，所以 $t\neq\pm\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

因为 $x_Ax_M=\frac{-9t^2-128}{128-9t^2}$，所以 $x_M=\frac{9t^2+128}{128-9t^2}$， ………………………………………… 6分

所以 $y_M=\frac{3t}{4}\left(\frac{9t^2+128}{128-9t^2}+1\right)=\frac{192t}{128-9t^2}$，

所以 $M\left(\frac{9t^2+128}{128-9t^2},\frac{192t}{128-9t^2}\right)$. ………………………………………………………… 7分

因为直线 $PB$ 的方程为 $y=-\frac{3}{2}t(x-1)$，

由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{8}=1,\\ y=-\frac{3}{2}t(x-1),\end{cases}$ 消去 $y$ 得 $(32-9t^2)x^2+18t^2x-9t^2-32=0$.

因为直线 $PB$ 与双曲线交于点 $B,N$，所以 $32-9t^2\neq0$，所以 $t\neq\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

因为 $x_Bx_N=\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}$，所以 $x_N=\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}$，

$y_N=-\frac{3}{2}t(x_N-1)=-\frac{3}{2}t\left(\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}-1\right)=\frac{96t}{32-9t^2}$，

所以 $N\left(\frac{-9t^2-32}{32-9t^2},\frac{96t}{32-9t^2}\right)$. ………………………………………………………… 9分

所以当 $t\neq\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 且 $t\neq\pm\frac{8\sqrt{2}}{3}$ 时，

直线 $MN$ 的斜率为 $k=\dfrac{\frac{192t}{128-9t^2}-\frac{96t}{32-9t^2}}{\frac{9t^2+128}{128-9t^2}-\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}}=\frac{-96t(64+9t^2)}{(9t^2+128)(32-9t^2)+(9t^2+32)(128-9t^2)}$；

当 $t\neq0$ 时，直线 $MN$ 的方程为

$y-\frac{96t}{32-9t^2}=\frac{-96t(64+9t^2)}{(9t^2+128)(32-9t^2)+(9t^2+32)(128-9t^2)}\left(x-\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}\right)$. ………………………… 10分

令 $y=0$，得 $\frac{1}{32-9t^2}=\frac{64+9t^2}{(9t^2+128)(32-9t^2)+(9t^2+32)(128-9t^2)}\left(x-\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}\right)$.

所以 $x=\frac{(9t^2+128)(32-9t^2)+(9t^2+32)(128-9t^2)}{(32-9t^2)(64+9t^2)}+\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}=\frac{3(2048-288t^2-81t^4)}{2048-288t^2-81t^4}=3$，

所以直线 $MN$ 过定点 $(3,0)$. ………………………………………………………………………… 11分

当 $t=0$ 时，$P\left(\frac{1}{3},0\right)$，直线 $MN$ 的方程为 $y=0$，过定点 $(3,0)$.

当 $t=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 或 $t=\pm\frac{8\sqrt{2}}{3}$ 时，直线 $PA,PB$ 分别与双曲线的渐近线平行，点 $M,N$ 不存在.

综上，直线 $MN$ 恒过定点 $(3,0)$. ………………………………………………………………… 12分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。