# 2023 年全国新高考 I 卷

适用范围：湖北、山东、广东、江苏、河北、湖南、福建、浙江

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

**1.** 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x|x^2-x-6\geqslant 0\}$，则 $M\cap N=$ （　　）

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{-2\}$　　D. $\{2\}$

**2.** 已知 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$，则 $z-\bar{z}=$ （　　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. $\mathrm{i}$　　C. $0$　　D. $1$

**3.** 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$．若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$，则 （　　）

A. $\lambda+\mu=1$　　B. $\lambda+\mu=-1$　　C. $\lambda\mu=1$　　D. $\lambda\mu=-1$

**4.** 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，则 $a$ 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,0)$　　C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

**5.** 设椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$C_2:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 $e_1,e_2$．若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$ （　　）

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

**6.** 过点 $(0,-2)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 $\alpha$，则 $\sin\alpha=$ （　　）

A. $1$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

**7.** 记 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列；乙：$\{\dfrac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，则 （　　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

**8.** 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$ （　　）

A. $\dfrac{7}{9}$　　B. $\dfrac{1}{9}$　　C. $-\dfrac{1}{9}$　　D. $-\dfrac{7}{9}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

**9.** 有一组样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_6$，其中 $x_1$ 是最小值，$x_6$ 是最大值，则 (　　)

**A.** $x_2, x_3, x_4, x_5$ 的平均数等于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的平均数

**B.** $x_2, x_3, x_4, x_5$ 的中位数等于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的中位数

**C.** $x_2, x_3, x_4, x_5$ 的标准差不小于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的标准差

**D.** $x_2, x_3, x_4, x_5$ 的极差不大于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的极差

**10.** 噪声污染问题越来越受到重视，用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p = 20 \times \lg \frac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0 (p_0 > 0)$ 是听觉下限阈值，$p$ 是实际声压．下表为不同声源的声压级：

| 声源 | 与声源的距离/ m | 声压级/dB |
|---|---|---|
| 燃油汽车 | 10 | 60～90 |
| 混合动力汽车 | 10 | 50～60 |
| 电动汽车 | 10 | 40 |

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 $p_1, p_2, p_3$，则 (　　)

**A.** $p_1 \geqslant p_2$　　**B.** $p_2 > 10p_3$　　**C.** $p_3 = 100p_0$　　**D.** $p_1 \leqslant 100p_2$

**11.** 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$，则 (　　)

**A.** $f(0) = 0$　　**B.** $f(1) = 0$

**C.** $f(x)$ 是偶函数　　**D.** $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

**12.** 下列物体中，能够被整体放入棱长为 1(单位： m) 的正方体容器 (容器壁厚度忽略不计) 内的有 (　　)

**A.** 直径为 0.99 m 的球体

**B.** 所有棱长均为 1.4 m 的四面体

**C.** 底面直径为 0.01 m，高为 1.8 m 的圆柱体

**D.** 底面直径为 1.2 m，高为 0.01 m 的圆柱体

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

**13.** 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有______种 (用数字作答)．

**14.** 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$A_1B_1=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为______.

**15.** 已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有 3 个零点，则 $\omega$ 的取值范围是______.

**16.** 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$. 点 $A$ 在 $C$ 上. 点 $B$ 在 $y$ 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，$\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 $C$ 的离心率为______.

**四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.**

**17.** 已知在 $\triangle ABC$ 中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$.

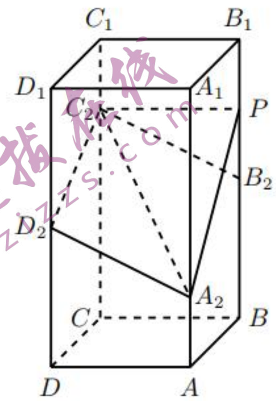
（1）求 $\sin A$；

（2）设 $AB=5$，求 $AB$ 边上的高.

**18.** 如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$. 点 $A_2$，$B_2$，$C_2$，$D_2$ 分别在棱 $AA_1$，$BB_1$，$CC_1$，$DD_1$ 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$.

（1）证明：$B_2C_2/\!/A_2D_2$；

（2）点 $P$ 在棱 $BB_1$ 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$ 时，求 $B_2P$.




**19.** 已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$.

**20.** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，且 $d>1$，令 $b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$，记 $S_n$，$T_n$ 分别为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和.

（1）若 $3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）若 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 $d$.

**21.** 甲乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8，由抽签决定第一次投篮的人选，第一次投篮的人是甲，乙的概率各为 0.5.

（1）求第 2 次投篮的人是乙的概率;

（2）求第 $i$ 次投篮的人是甲的概率;

（3）已知：若随机变量 $X_i$ 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $E(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}q_i$，记前 $n$ 次（即从第 1 次到第 $n$ 次投篮）中甲投篮的次数为 $Y$，求 $E(Y)$.

**22.** 在直角坐标系 $xOy$ 中，点 $P$ 到 $x$ 轴的距离等于点 $P$ 到点 $(0,\frac{1}{2})$ 的距离，记动点 $P$ 的轨迹为 $W$.

（1）求 $W$ 的方程;

（2）已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 $W$ 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

# 2023年新高考数学Ⅰ卷试题参考答案

## 一、单选题

1、C　2、A　3、D　4、D

5、A　6、B　7、C　8、B

## 二、多选题

9、BD　10、ACD　11、ABC　12、ABD

## 三、填空题

13、64　14、$\frac{7\sqrt{6}}{6}$　15、$2\le\omega<3$　16、$\frac{3\sqrt{5}}{5}$

## 四、解答题

**17.（10分）**

已知在$\triangle ABC$中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$.

（1）求$\sin A$；

（2）设$AB=5$，求$AB$边上的高.

解析

(1). 由题意得

$$A+B=3C\ \Rightarrow\ A+B+C=4C=\pi\ \Rightarrow\ C=\frac{\pi}{4}$$

所以

$$2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3}{4}\pi-A\right)\ \Rightarrow\ \sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

(2). 因为 $\sin B=\sin(A+C)=\frac{2}{\sqrt{5}}$，所以由正弦定理可知

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\ \Rightarrow\ b=2\sqrt{10}$$

所以由面积法可知

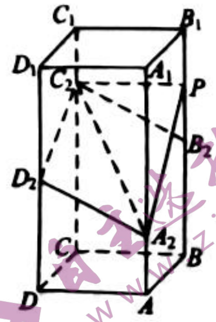
$$S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h\ \Rightarrow\ h=b\sin A=6$$

**18.（12 分）**

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$．点 $A_2$，$B_2$，$C_2$，$D_2$ 分别在棱 $AA_1$，$BB_1$，$CC_1$，$DD_1$ 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$．

（1）证明：$B_2C_2 // A_2D_2$；

（2）点 $P$ 在棱 $BB_1$ 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$ 时，求 $B_2P$．




解析

以 C 为原点，CD 为 $x$ 轴，CB 为 $y$ 轴，$CC_1$ 为 $z$ 轴建立空间直角坐标系，所以

$B_2:(0,2,2)$，$C_2:(0,0,3)$，$A_2:(2,2,1)$，$D_2:(2,0,2)$

(1)．因为 $\overrightarrow{B_2C_2}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$

所以 $\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{A_2D_2}$，所以 $B_2C_2 // A_2D_2$．

(2)．设 $P:(0,2,t)$，其中 $2\le t\le 4$

所以 $\overrightarrow{PA_2}=(2,0,1-t)$，$\overrightarrow{PC_2}=(0,-2,3-t)$，$\overrightarrow{D_2C_2}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{D_2A_2}=(0,2,-1)$．

所以面 $PA_2C_2$ 法向量 $\overrightarrow{n_1}=(t-1,3-t,2)$，面 $D_2A_2C_2$ 法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,2)$

因为二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$，所以

$$\left|\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2t^2-8t+14}}\right|=|\cos 150°|=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ t=1(\text{舍})\ ||\ t=3$$

所以 $B_2P=1$

**19.（12 分）**

**已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$.**

**（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;**

**（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.**

解析

(1). 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=a\cdot e^x-1$, 故

① $a\leqslant 0$ 时, $f'(x)\leqslant -1<0$, 函数 $f(x)$ 单调递减

② $a>0$ 时, 令 $f'(x)=0$ 得 $x_0=-\ln a$, 故

| | $(-\infty,-\ln a)$ | $-\ln a$ | $(-\ln a,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 极小值 | ↗ |

(2). $f_{\min}=f(-\ln a)=a^2+1+\ln a$

令 $g(a)=a^2-\ln a-\frac{1}{2}$, 求导得 $g'(a)=2a-\frac{1}{a}$

令导数为 0 解得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以

| | $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| $g'(a)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(a)$ | ↘ | 极小值 | ↗ |

所以 $g_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\ln 2}{2}>0$

故 $g(a)>0$, 所以 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$

**20.** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，且 $d>1$，令 $b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$，记 $S_n$，$T_n$ 分别为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和.

(1) 若 $3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 $d$.

(1). 由题意得 $3a_2=3a_1+a_3$，$2a_2=a_1+a_3$，解得

$$a_2=2a_1$$

又因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以 $a_n=a_1\cdot n$，所以 $b_n=\dfrac{n+1}{a_1}$

因为 $S_3+T_3=21$，所以

$$6a_1+\frac{9}{a_1}=21 \Rightarrow a_1=3 \,||\, a_1=\frac{1}{2}(\text{舍})$$

所以 $a_n=3n$

(2). 设 $a_n=d_a\cdot n+p_a$，$b_n=d_b\cdot n+p_b$，其中 $d_a>1$

记 $c_n=a_n-b_n=(d_a-d_b)n+p_a-p_b$，故 $\{c_n\}$ 也为等差数列，所以

$$S_{99}-T_{99}=c_1+c_2+\cdots+c_{99}=\frac{(c_1+c_{99})\cdot 99}{2}=99\cdot c_{50}=99$$

所以 $c_{50}=1$

因为 $b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$，所以代入可得

$$d_bn+p_b=\frac{n^2+n}{d_an+p_a}\Longrightarrow n^2+n=d_a\cdot d_b\cdot n^2+(d_a\cdot p_b+d_b\cdot p_a)n+p_a\cdot p_b$$

所以可得方程组

$$\begin{cases} d_a\cdot d_b=1 \\ d_a\cdot p_b+d_b\cdot p_a=1 \\ p_a\cdot p_b=0 \\ 50(d_a-d_b)+p_a-p_b=1 \end{cases}$$

解得 $d=d_a=\dfrac{51}{50}$

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。