



姓名 \_\_\_\_\_ 准考证号 \_\_\_\_\_

(在此卷上答题无效)

绝密★启用前

2021 年普通高等学校招生全国统一考试(新高考)

## 数 学

注意事项:

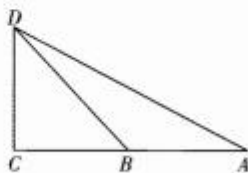
- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 设集合  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 4, 8\}$ , 则  $\complement_A B =$ 
  - $\{1, 2, 4, 8\}$
  - $\{2, 4, 8\}$
  - $\{0, 3, 5\}$
  - $\{0, 1, 3, 5\}$
- $(1+2i)(3-4i) =$ 
  - $-5+2i$
  - $-5+10i$
  - $-5-10i$
  - $11+2i$
- 韦伯-费希纳定律是表明心理量和物理量之间关系的定律,其中心理量和物理量之间满足关系式  $S = k \ln I + C$  (其中  $S$  表示心理量,  $k$  是常数,  $I$  表示物理量,  $C$  是积分常数), 表示的含义是心理量和物理量的对数值成正比。通过研究表明  $C = 3$ , 当  $I = e^2$  时,  $S = 7$ 。若  $S = 3 \ln 3$ , 则  $I$  的值大约为(参考数据:  $e^2 \approx 4.48$ )
  - 1.07
  - 1.16
  - 1.45
  - 2.15
- 岳阳楼与湖北武汉黄鹤楼、江西南昌滕王阁并称为“江南三大名楼”, 是“中国十大历史文化名楼”之一, 世称“天下第一楼”。其地处岳阳古城西门城墙之上, 紧靠洞庭湖畔, 下瞰洞庭, 前望君山。始建于东汉建安二十年(215 年), 历代屡加重修, 现存建筑沿袭清光绪六年(1880 年)重建时的形制与格局。因北宋滕宗谅重修岳阳楼, 邀好友范仲淹作《岳阳楼记》使得岳阳楼著称于世。自古有“洞庭天下水, 岳阳天下楼”之美誉。小李为测量岳阳楼的高度选取了与底部水平的直线  $AC$ , 如图, 测得  $\angle DAC = 30^\circ$ ,  $\angle DBC = 45^\circ$ ,  $AB = 14$  米, 则岳阳楼的高度  $CD$  约为(参考数据:  $\sqrt{2} \approx 1.414$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.732$ )



图①



图②

- 18 米
- 19 米
- 20 米
- 21 米

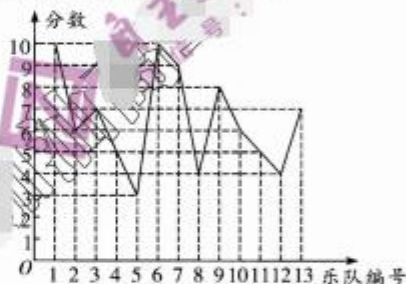
新高考·数学试题·黑卷 第 1 页(共 4 页)

5. 已知向量  $a, b$  满足  $|a| = 3|b| = 2, a \cdot b = 1$ , 若  $-a + 2b$  与  $ma + 3b$  共线, 则  $|ma + 3b| =$   
 A. 2                      B. 4                      C.  $\sqrt{22}$                       D. 22
6. 某公司销售六种不同型号的新能源电动汽车  $A, B, C, D, E, F$ . 为了让顾客选出自己心仪的电动汽车, 把它们按顺序排成一排,  $A$  必须安排在前两个位置,  $B, C$  不相邻, 则不同的排法有  
 A. 144 种                      B. 156 种                      C. 160 种                      D. 178 种
7. 已知长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = BC = 3, AA_1 = 4, M$  是  $AD_1$  上任意一点 (不是端点),  $N$  是  $BC$  的中点, 则异面直线  $C_1D_1$  与  $MN$  所成角的正切值的最小值为  
 A.  $\frac{3\sqrt{10}}{5}$                       B.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$                       C.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       D.  $\frac{2}{5}$
8. 已知函数  $f(x) = e^{\alpha x} - \sqrt{x}$  存在两个零点, 则正数  $\alpha$  的取值范围是  
 A.  $(0, \frac{e}{2})$                       B.  $(\frac{e}{2}, +\infty)$                       C.  $(0, \frac{1}{2e})$                       D.  $(\frac{1}{2e}, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 某次音乐节, 评委给 13 支乐队的评分 (十分制) 如图, 下列说法正确的是

- A. 13 支乐队评分的极差为 7  
 B. 13 支乐队中评分不低于 7 分的有 6 支  
 C. 13 支乐队评分的平均数约为 6.46  
 D. 第 6 支到第 12 支乐队的评分逐渐降低



10. 已知函数  $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象

的相邻两条对称轴间的距离为  $2\pi, f(0) = 1$ , 则

- A.  $\omega = \frac{\pi}{2}$   
 B. 函数  $f(x)$  的图象关于  $x = \frac{2\pi}{3}$  对称  
 C. 函数  $f(x)$  的单调递减区间为  $[4k\pi - \frac{2\pi}{3}, 4k\pi + \frac{4\pi}{3}]$  ( $k \in \mathbf{Z}$ )  
 D. 函数  $f(x) \geq 1$  的解集为  $[4k\pi - \frac{4\pi}{3}, 4k\pi]$  ( $k \in \mathbf{Z}$ )

11. 若  $4^x - 4^y < 5^{-x} - 5^{-y}$ , 则

- A.  $x < y$                       B.  $y^{-1} > x^{-1}$                       C.  $\lg(y-x) > 0$                       D.  $(\frac{1}{3})^y < 3^{-x}$

12. 已知双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ), 圆  $C_2: (x-b)^2 + (y-a)^2 = a^2b^2$ .

- A. 圆  $C_2$  的圆心在双曲线  $C_1$  上  
 B. 若双曲线  $C_1$  的焦距为 4, 则  $ab \leq 2$   
 C. 双曲线  $C_1$  的顶点与圆  $C_2$  的圆心构成的三角形的面积为  $ab$   
 D. 若圆  $C_2$  与  $x$  轴和双曲线  $C_1$  的渐近线均相切, 则双曲线  $C_1$  的离心率为 2

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ ,  $a_4 = -a_2$ ,  $a_3 - a_5 = 4$ , 则  $a_1 =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知随机变量  $X \sim B(n, \frac{1}{n})$ ,  $P(X=n) = \frac{1}{27}$ , 则  $P(X=1) =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知直线  $l$  (斜率大于0) 的倾斜角的正弦值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 在  $x$  轴上的截距为  $-2$ ,  $l$  与抛物线  $C: x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 交于  $A, B$  两点, 若  $|AB| = 16$ , 则  $p =$  \_\_\_\_\_.

16. 中国最早的化妆水是1896年在香港开设的广生行生产的花露水, 其具有保湿、滋润、健康皮肤的功效. 已知该化妆水容器由一个半球和一个圆柱组成(其中上半球是容器的盖子, 化妆水储存在圆柱中), 容器轴截面如图所示, 上部分是半圆形, 中间区域是矩形, 其外周长为12 cm. 则当圆柱的底面半径  $r =$  \_\_\_\_\_ 时, 该容器的容积最大, 最大值为 \_\_\_\_\_.



四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分10分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ , 且 $2a \cos B = 2c + b$ .

(1) 求  $A$ ;

(2) 若  $a = 3\sqrt{3}, b = 3$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

18. (本题满分12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ , 且 $a_1 + 2a_2 = a_3$ .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求使得 $S_n \leq 121$ 成立的 $n$ 的最大值.

19. (本题满分12分) 经验表明, 一般树的胸径(树的主干在地面以上1.3 m处的直径)越大, 树就越高. 由于测量树高比测量胸径困难, 因此研究人员希望由胸径预测树高. 下面给出了某林场在研究树高与胸径之间的关系时收集的某种树的数据.

编号	1	2	3	4	5	6
胸径/cm	18.1	20.1	22.2	24.4	26.0	28.3
树高/m	18.8	19.2	21.0	21.0	22.1	22.1
编号	7	8	9	10	11	12
胸径/cm	29.6	32.4	33.7	35.7	38.3	40.2
树高/m	22.4	22.6	23.0	24.3	23.9	24.7

(1) 根据表格绘制树高  $y$  与胸径  $x$  之间关系的散点图;

(2) 分析树高  $y$  与胸径  $x$  之间的相关关系, 并求  $y$  关于  $x$  的线性回归方程;

(3) 预测当树的胸径为 50.6 cm 时, 树的高度约是多少. (精确到 0.01)

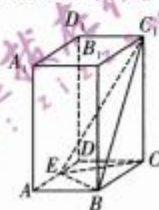


附：回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

参考数据： $\sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 7851.03$ ,  $\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 10715.74$ .

20. (本题满分 12 分) 在长方体  $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$  中, 已知  $AB = AD$ ,  $E$  为  $AD$  的中点.
- (1) 在线段  $B_1 C_1$  上是否存在点  $F$ , 使得平面  $A_1 A F \parallel$  平面  $E C C_1$ ? 若存在, 请加以证明, 若不存在, 请说明理由;
- (2) 设  $AD = 2$ ,  $AA_1 = 4$ , 点  $G$  在  $AA_1$  上且满足  $\overrightarrow{AA_1} = 8 \overrightarrow{AG}$ , 求  $EG$  与平面  $E B C_1$  所成角的余弦值.



21. (本题满分 12 分) 在数学中, 我们把仅有变量不同, 而结构形式相同的两个式子称为同构式, 相应的方程称为同构方程, 相应的不等式称为同构不等式. 若关于  $a$  的方程  $ae^a = e^b$  和关于  $b$  的方程  $b(\ln b - 2) = e^{2a-1}$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 可化为同构方程.
- (1) 求  $ab$  的值;
- (2) 已知函数  $f(x) = x(\ln x + \frac{1}{3})$ , 若斜率为  $k$  的直线与曲线  $y = f'(x)$  相交于  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  ( $x_1 < x_2$ ) 两点, 求证:  $x_1 < \frac{1}{k} < x_2$ .

22. (本题满分 12 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .
- (1) 椭圆  $C$  是否存在以点  $(-1, \frac{1}{2})$  为中点的弦? 若存在, 求出弦所在的直线  $l$  的方程, 若不存在, 请说明理由;
- (2) 已知椭圆  $C$  的左、右顶点分别为  $A, B$ , 点  $P$  是椭圆  $C$  上的点, 若直线  $AP, BP$  分别与直线  $y = 3$  交于  $G, H$  两点, 求线段  $GH$  的长度取得最小值时直线  $GP$  的斜率.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等

政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》