# 2023 届高三冲刺卷(二) 全国卷

## 文科数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】$A=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}$,$B=\{x|x^2-5x-6\leqslant 0\}=\{x|(x+1)(x-6)\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 6\}$,$A\cap B=\{-1,2,5\}$.故选 A.

2.B 【解析】由$\dfrac{z-2i}{z+2}=i$,得 $z-2i=i(z+2)$,$z-2i=iz+2i$,$z=\dfrac{4i}{1-i}=\dfrac{4i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{4i-4}{2}=-2+2i$,$|z|=2\sqrt{2}$.故选 B.

3.D 【解析】塔的偏移距离 $BC=AB\sin\theta$,设两座塔的塔高为 $h$,则根据倾斜角的正弦值分别为$\dfrac{7}{25}$,$\dfrac{9}{41}$,得两座塔的偏移距离差的绝对值为$\left|\dfrac{7}{25}h-\dfrac{9}{41}h\right|$,即$\left|\dfrac{7}{25}h-\dfrac{9}{41}h\right|=3.1$,$h=\dfrac{3.1}{\dfrac{7}{25}-\dfrac{9}{41}}$,

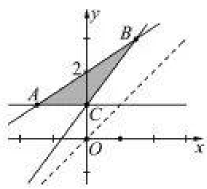
塔顶到地面的距离 $AC=AB\cos\theta$,根据倾斜角的正弦值分别为$\dfrac{7}{25}$,$\dfrac{9}{41}$,得倾斜角的余弦值分别为$\dfrac{24}{25}$,$\dfrac{40}{41}$,两座塔的塔顶到地面的距离差的绝对值为$\left|\dfrac{24}{25}h-\dfrac{40}{41}h\right|=\dfrac{3.1}{\dfrac{7}{25}-\dfrac{9}{41}}\times\left(\dfrac{40}{41}-\dfrac{24}{25}\right)=0.8$.故选 D.

4.C 【解析】由 $\lg a_1$,$\lg a_3$,$\lg a_6$ 成等差数列,得 $2\lg a_3=\lg a_1+\lg a_6$,$\lg a_3^2=\lg a_1a_6$,$a_3^2=a_1a_6$,又 $a_3=a_1+2d$,$a_6=a_1+5d$,所以 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+5d)$,$a_1^2+4a_1d+4d^2=a_1^2+5a_1d$,$4d=a_1$,$\lg a_1$,$\lg a_3$,$\lg a_6$ 的公差为 $\lg a_3-\lg a_1=\lg\dfrac{a_3}{a_1}=\lg\dfrac{a_1+2d}{a_1}=\lg\dfrac{4d+2d}{4d}=\lg\dfrac{3}{2}$.故选 C.

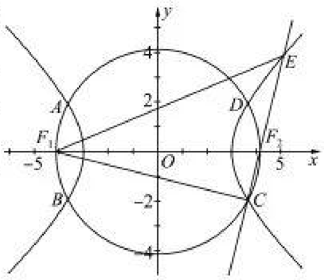
5.D 【解析】众数是最高矩形的中点横坐标,因此众数为 [illegible],设中位数为 [illegible],则 [illegible],得 [illegible],平均数为 [illegible]×0.2+[illegible]×0.2[illegible]×0.2[illegible]×0.16+[illegible]×0.12+[illegible]×0.04=[illegible],因此有众数[illegible]平均数[illegible]中位数,故选 D.

6.A 【解析】若 [illegible],则直线 $m$,$n$ 可以平行,也可以相交,还可以异面;若 [illegible],则存在平面 $\alpha$,有 [illegible],故 A 正确;若 [illegible],则 [illegible],因垂直于同一平面的两条直线平行;若 [illegible],则存在平面 $\alpha$,有 [illegible],故 B 错误;若 [illegible],则直线 [illegible];若 [illegible],则不存在直线 $l$,有 [illegible],故 C 错误;若 [illegible],则 [illegible],即平行于同一直线的两直线平行,若 $m/\!/n$,则存在直线 $l$,有 [illegible],故 D 错误.故选 A.

7.A 【解析】作出约束条件$\begin{cases}2x-3y+6\geqslant 0,\\4x-3y+3\leqslant 0,\\y\geqslant 1,\end{cases}$的可行域,即$\triangle ABC$ 所表示的区域,作出直线 $l:x-y=0$,平移直线 $l$,当直线 $l$ 经过点 $A$ 时,$z=x-y$ 取最小值,解方程组$\begin{cases}2x-3y+6=0,\\y=1,\end{cases}$得点 $A\left(-\dfrac{3}{2},1\right)$,于是 $z_{\min}=-\dfrac{3}{2}-1=-\dfrac{5}{2}$.故选 A.




8.C 【解析】如图所示,设$|CF_2|=m$,则$|EF_2|=2m$,$|EC|=3m$ 连接 $CF_1$,$EF_1$,则由双曲线的定义,得$|CF_1|=2a+m$,$|EF_1|=2a+2m$,由于点 $C$ 在以 $F_1F_2$ 为直径的圆上,所以 $CF_1\perp CF_2$,在直角三角形 $ECF_1$ 中,$|CF_1|^2+|CE|^2=|EF_1|^2$,即$(2a+2m)^2=(2a+m)^2+(3m)^2$,得 $m=\dfrac{2}{3}a$,在直角三角形 $CF_1F_2$ 中,$|CF_1|^2+|CF_2|^2=|F_1F_2|^2$,即$(2a+m)^2+m^2=(2c)^2$,$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{17}{9}$,离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.故选 C.




9.C 【解析】因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{36}$对称,所以$-\omega\cdot\dfrac{\pi}{36}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$,$n\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\omega}{36}+n\right)\pi$,

$n\in\mathbf{Z}$.根据$\frac{\pi}{18}<x<\frac{5\pi}{36}$,则$\frac{\omega\pi}{18}<\omega x<\frac{5\omega\pi}{36}$,$\frac{\omega\pi}{18}+\varphi<\omega x+\varphi<\frac{5\omega\pi}{36}+\varphi$,因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$是在区间$\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$上的单调减函数,

所以$\begin{cases}\frac{\omega\pi}{18}+\varphi\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\\ \frac{5\omega\pi}{36}+\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{18}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{36}+n\right)\pi\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,n\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z},\\ \frac{5\omega\pi}{36}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{36}+n\right)\pi\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,n\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{\omega}{18}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{36}+n\right)\geqslant\frac{1}{2}+2k,n\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z},\\ \frac{5\omega}{36}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{36}+n\right)\leqslant\frac{3}{2}+2k,n\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

$12(2k-n)\leqslant\omega\leqslant6(2k-n+1)$,$n\in\mathbf{Z}$,$k\in\mathbf{Z}$,因为 $\omega>0$,所以 $2k-n=0$ 或 $2k-n=1$,当 $2k-n=0$ 时,$0<\omega\leqslant6$,当 $2k-n=1$ 时,

$12\leqslant\omega\leqslant12$;由于$\frac{\pi}{18}<\frac{7\pi}{72}<\frac{5\pi}{36}$,且 $f(x)$的一个零点是 $x=\frac{7}{72}\pi$,

所以 $\omega\times\frac{7\pi}{72}+\varphi=(2m+1)\pi$,$m\in\mathbf{Z}$,$\omega\times\frac{7\pi}{72}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{36}+n\right)\pi=(2m+1)\pi$,$m\in\mathbf{Z}$,$n\in\mathbf{Z}$,$\omega=8(2m-n)+4$,$m\in\mathbf{Z}$,$n\in\mathbf{Z}$,

根据 $0<\omega\leqslant6$ 或 $12\leqslant\omega\leqslant12$,可得 $\omega=4$,或 $\omega=12$,$\omega$ 的最小值为 4,故选 C.

10.B 【解析】抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

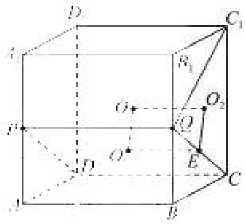
当直线 $AB$ 的斜率不存在时,直线 $AB$ 的方程为 $x=2$,代入 $y^2=4x$,得 $y^2=8$,$y=\pm2\sqrt{2}$,$A(2,2\sqrt{2})$,$B(2,-2\sqrt{2})$,$|AF|=|BF|=\sqrt{1+8}=3$,$|AF|+|BF|=6$,与 $|AF|+|BF|=10$ 矛盾.

当直线 $AB$ 的斜率存在时,设直线 $AB$ 的方程为 $y=k(x-2)$,代入 $y^2=4x$,得 $k^2x^2-(4k^2+4)x+4k^2=0$,则 $x_1+x_2=4+\frac{4}{k^2}$,

$x_1\cdot x_2$ [illegible] 由抛物线的定义知,$|AF|$ [illegible] $|BF|$ [illegible] 于是 $|AF|$ [illegible] $|BF|$ [illegible]

所以 [illegible] $|AF|\cdot|BF|$ [illegible] 故选 B.

11.D 【解析】[illegible]




[illegible]

设矩形 $PQCD$ 的外接圆半径为 $m$,则 [illegible]

设球心为 $O$,过 $O$ 作 $OO_1\perp$平面 $PQCD$,垂足为 $O_1$,过 $O$ 作 $OO_2\perp$平面 $C_1QC$,垂足为 $O_2$,则 $O_1$ 是矩形 $PQCD$ 的外心,$O_2$ 是三角形 $C_1QC$ 的外心,取 $CQ$ 中点 $E$,则 $O_1E\perp QC$,于是 $O_1E\perp$平面 $C_1QC$,所以四边形 $OO_1EO_2$ 是矩形,设球半径为 $R$,

解法一:$OO_2=O_1E=1$,则 $R^2=r^2+|OO_2|^2=\frac{25}{16}+1=\frac{41}{16}$,于是球的表面积为$\frac{41}{4}\pi$,故选 D.

解法二:$O_2E=r\sin\angle O_2QE=r\cos\angle C_1CQ=\frac{5}{4}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$,$OO_1=O_2E=\frac{\sqrt{5}}{4}$,$R^2=m^2+|OO_1|^2=\frac{9}{4}+\frac{5}{16}=\frac{41}{16}$,于是球的表面积为$\frac{41}{4}\pi$,故选 D.

12.C 【解析】由 $a\mathrm{e}=\mathrm{e}^a$,$b\mathrm{e}^{1.2}=1.2\mathrm{e}^b$,$c\mathrm{e}^{1.6}=1.6\mathrm{e}^c$,得$\frac{a}{\mathrm{e}^a}=\frac{1}{\mathrm{e}}$,$\frac{b}{\mathrm{e}^b}=\frac{1.2}{\mathrm{e}^{1.2}}$,$\frac{c}{\mathrm{e}^c}=\frac{1.6}{\mathrm{e}^{1.6}}$,令 $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$,则 $f'(x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$,当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$在$(-\infty,1)$上是增函数,在$(1,+\infty)$上是减函数,于是 $f(1)>f(1.2)>f(1.6)$,即 $f(a)>f(b)>f(c)$,又 $a,b,c\in[0,1]$,所以 $a>b>c$,故选 C.

13.2 【解析】由 $\boldsymbol{a}=(1,-x)$,$\boldsymbol{b}=(x,-3)$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,得$\frac{1}{x}=\frac{-x}{-3}$,$x^2=3$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+3}=2$.

14.$-\ln 3$ 【解析】函数 $f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$,$\ln(x+1)>0$,当 $1<x\leqslant2$ 时,$\ln(x-1)\leqslant0$,$f(x)=-\ln(x-1)-\ln(x+1)=-\ln(x^2-1)$,$f(x)$在$(1,2)$上是减函数,当 $x>2$ 时,$\ln(x-1)>0$,$f(x)=\ln(x-1)-\ln(x+1)=\ln\frac{x-1}{x+1}=\ln\left(1-\frac{2}{x+1}\right)$,

$f(x)$在$(2,+\infty)$上是增函数，因此当$x=2$时，$f(x)$有最小值$f(2)=-\ln 3$.

15.$\frac{3}{10}$ 【解析】这6盆花可以分别是：玫瑰3百合1牡丹1兰花1，玫瑰1百合3牡丹1兰花1，玫瑰1百合1牡丹3兰花1，玫瑰1百合1牡丹1兰花3，玫瑰2百合2牡丹1兰花1，玫瑰2百合1牡丹2兰花1，玫瑰2百合1牡丹1兰花2，玫瑰1百合2牡丹2兰花1，玫瑰1百合2牡丹1兰花2，玫瑰1百合1牡丹2兰花2，共有10种，其中玫瑰恰好有2盆的有3种，因此玫瑰花恰好种2盆的概率是$\frac{3}{10}$.

16.$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ 【解析】$f'(x)=\frac{1}{x}+a\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{ax^2+x+a}{x^2}$,

当$a\geqslant 0$，$f'(x)=\frac{ax^2+x+a}{x^2}\geqslant 0$，所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数，当$x>1$时，$f(x)>f(1)=0$，与$f(x)<0$矛盾；

当$a<0$时，若$1-4a^2\leqslant 0$，即$a\leqslant -\frac{1}{2}$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上是减函数，当$x>1$时，$f(x)<f(1)=0$，符合题意；

若$-\frac{1}{2}<a<0$，令$f'(x)=\frac{ax^2+x+a}{x^2}>0$，则$ax^2+x+a>0$，$1<x<\frac{-1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，所以$f(x)$在$\left(1,\frac{-1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$是增函数，当$1<x<\frac{-1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}$时，$f(x)>f(1)=0$，与$f(x)<0$矛盾；故实数$a$的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

17.(1)解：由$5S_{[illegible]}=11S_{[illegible]}$，得$5(a_{[illegible]}+a_{[illegible]})=11a_{[illegible]}$，所以$6a_{[illegible]}=5a_{[illegible]}$，$\frac{a_2}{[illegible]}=\frac{6}{[illegible]}$，由$\frac{a_{n+1}}{[illegible]}=2-a_{[illegible]}$ [illegible]，得$\frac{a_2}{[illegible]}=2-[illegible]$，

所以[illegible] …………………………………… 2分

[illegible]

[illegible] …………………………………… 3分

所以[illegible] …………………………………… 4分

[illegible] …………………………………… 6分

(2)证明：由(1)知，$\frac{1}{a_n}-1=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$a_n=\frac{2^n}{2^n+1}$，$a_n=\frac{2^n+1-1}{2^n+1}=1-\frac{1}{2^n+1}$， …………………………………… 7分

$S_n=1-\frac{1}{2+1}+1-\frac{1}{2^2+1}+1-\frac{1}{2^3+1}+\cdots+1-\frac{1}{2^n+1}=n-\left(\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}\right)$,

因为$2^n<2^n+1<2^{n+1}$，所以$\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$， …………………………………… 9分

于是$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$,

其中$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$，$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$,

于是$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}<1-\frac{1}{2^n}$， …………………………………… 11分

所以$n-1+\frac{1}{2^n}<n-\left(\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}\right)<n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$,

即$n-1+\frac{1}{2^n}<S_n<n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$. …………………………………… 12分

18.解：(1)$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{5.27}{0.46}\approx 11.46$，…… 2 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=32.56-11.46\times 2.82\approx 0.24$，…… 4 分

$y$ 关于 $x$ 的回归方程为 $\hat{y}=11.46\hat{x}+0.24$.…… 5 分

(2) 当 $y=50$ 时，$50=11.46\hat{x}+0.24$，则 $x\approx 4.34$，…… 7 分

根据 2020 年人均年可配收入为 3.218 9，以及 $3.2189\times(1+0.06)^5=3.2189\times 1.34\approx 4.31<4.34$，…… 8 分

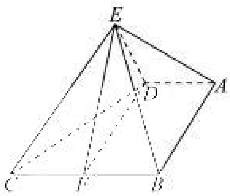
和 $3.2189\times(1+0.06)^6=3.2189\times 1.42\approx 4.57>4.34$，…… 9 分

可得 2026 年每百户汽车拥有量可以达到 50 辆，…… 10 分

从 2020 年起，设每百户汽车拥有量平均每年的增长速度为 $x$，则 $37.1(1+x)^6=50$，$(1+x)^6=\dfrac{50}{37.1}$，$(1+x)^6=1.348$，由于 $(1+0.05)^6=1.340$，所以 $x\approx 0.05$，

即每百户汽车拥有量平均每年至少增长的速度为 5%.…… 12 分

19.解：(1)当点 $F$ 是 $BC$ 的中点时，面 $DEF\perp$ 面 $ABCD$，证明如下：



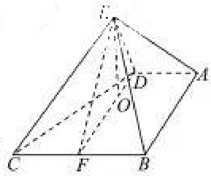

由点 $F$ 是 $BC$ 的中点，得 $BF=\dfrac{1}{2}BC$，又 $AD/\!/BC$，$BC=2AD$，所以 $AD/\!/BF$，$AD=BF$，四边形 $ADFB$ 是平行四边形. …… 2 分

根据 $\angle BAD=\angle CBA=90°$，得四边形 $ADFB$ 是矩形，故 $BC\perp DF$，…… 3 分

因为 $ED\perp$ 面 $EBC$，$BC\subset$ 面 $EBC$，所以 $BC\perp ED$，又因为 $DF\cap ED=D$，$DF$，$ED\subset$ 面 $DEF$，于是 $BC\perp$ 面 $DEF$.

由于 $BC\subset$ 面 $ABCD$，因此面 $DEF\perp$ 面 $ABCD$. …… 5 分

(2)因为面 $DEF\perp$ 面 $ABCD$，面 $DEF\cap$ 面 $ABCD=DF$，所以过点 $E$ 作 $EO\perp DF$ 于点 $O$，则 $EO\perp$ 面 $ABCD$，$EO$ 的长就是四棱锥 $E-ABCD$ 的高. …… 6 分




因为 $ED\perp$ 面 $EBC$，所以 $ED\perp EF$，在 Rt$\triangle DEF$ 中，$EF=\sqrt{3}$，$DF=AB=2AD=2ED$，由勾股定理，得 $EF^2+ED^2=DF^2$，所以 $3+ED^2=4ED^2$，于是 $ED=1$，$DF=2$，根据 $EO\cdot DF=ED\cdot EF$，得 $EO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. …… 8 分

根据 $AB=DF=2$，以及 $BC=AB=2$，$AD=\dfrac{1}{2}AB=1$，$\angle BAD=\angle CBA=90°$，

得四边形 $ABCD$ 的面积为 $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC)\cdot AB=\dfrac{1}{2}\times(1+2)\times 2=3$，…… 10 分

因此四棱锥 $E-ABCD$ 的体积 $V_{E-ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\times EO=\dfrac{1}{3}\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. …… 12 分

20.解：(1)$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，因为 $x>0$，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，由 $f'(x)<0$，得 $x>1$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，在 $(1,+\infty)$ 上是减函数，$f(x)$ 有极大值 $f(1)=-1$，无极小值.…… 2 分

$g'(x)=\dfrac{e^x x^2-2xe^x}{(x^2)^2}=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$，因为 $x>0$，由 $g'(x)>0$，得 $x>2$，由 $g'(x)<0$，得 $0<x<2$，所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上是减函数，在 $(2,+\infty)$ 上是增函数，$g(x)$ 有极小值 $g(2)=\dfrac{e^2}{4}$，无极大值. …… 4 分

(2)函数 $h(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$h(x)=af(x)+\dfrac{1}{xg(x)}=a(\ln x-x)+\dfrac{x}{e^x}$，

$h'(x)=a\left(\frac{1}{x}-1\right)+\frac{1-x}{e^x}=a\cdot\frac{1-x}{x}+\frac{1-x}{e^x}=(1-x)\left(\frac{1}{e^x}+\frac{a}{x}\right)$. …………………… 5分

当 $a=0$ 时,$h(x)=\frac{x}{e^x}>0$,$h(x)$ 无零点; …………………… 6分

当 $a>0$ 时,$\frac{1}{e^x}+\frac{a}{x}>0$,令 $h'(x)>0$,得 $0<x<1$,令 $h'(x)<0$,得 $x>1$,所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数,在 $(1,+\infty)$ 上是减函数,

$h(x)$ 有最大值 $h(1)=\frac{1}{e}-a$

若 $\frac{1}{e}-a<0$,即 $a>\frac{1}{e}$ 时,$h(x)$ 无零点; …………………… 7分

若 $\frac{1}{e}-a=0$,即 $a=\frac{1}{e}$ 时,$h(x)$ 只有一个零点; …………………… 8分

若 $\frac{1}{e}-a>0$,即 $0<a<\frac{1}{e}$ 时,$h(1)>0$,因为 $a>0$,所以 $e^a>1$,由(1)知 $\ln a-a<-1$,

所以 $h(a)=\frac{a}{e^a}+a(\ln a-a)<\frac{a}{e^a}-a=a\left(\frac{1}{e^a}-1\right)<0$,根据 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数,$h(1)>0$,且 $a<1$,所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一零点. …………………… 9分

由(1)知 $\frac{e^{\frac{1}{a}}}{\left(\frac{1}{a}\right)^2}>\frac{e^2}{4}>1$ 以及 $\ln a-a<-1$,于是有 $\frac{\frac{1}{a}}{e^{\frac{1}{a}}}<a$ 和 $\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}<-1$,所以 $h\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\frac{1}{a}}{e^{\frac{1}{a}}}+a\left(\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\right)<a-a=0$,又因为 $h(1)>0$,$\frac{1}{a}>1$,$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数,所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点. …………………… 10分

当 $a<0$ 时,由(1)知,$\ln x-x\leq-1<0$,于是 $a(\ln x-x)>0$,而 $\frac{x}{e^x}>0$,所以 $h(x)>0$,$h(x)$ 无零点. …………………… 11分

因此 $a<0$ 或 $a>\frac{1}{e}$ 时,$h(x)$ 无零点;$a=\frac{1}{e}$ 时,$h(x)$ 只有一个零点;$0<a<\frac{1}{e}$ 时,$h(x)$ 有两个零点. …………………… 12分

21.(1)证明:椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点 $A(0,b)$,右焦点 $F(c,0)$,点 $B\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$,$\overrightarrow{FB}=\left(\frac{5}{3}-c,-\frac{4}{3}\right)$,$\overrightarrow{AF}=(c,-b)$,根据

$3\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$,得 $\begin{cases}5-3c=2c,\\-4=-2b,\end{cases}$ 所以 $b=2$,$c=1$, …………………… 3分

$a^2=b^2+c^2=5$,所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$,

因为 $\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{5}+\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}{4}=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=1$,

所以点 $B\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$ 在椭圆上. …………………… 5分

(2)解:设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,把 $y=kx+\frac{1}{k}$ 代入 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$,得 $(5k^2+4)x^2+10x+\frac{5}{k^2}-20=0$,由 $\Delta=100-4(5k^2+4)\left(\frac{5}{k^2}-20\right)=80\left(5k^2+4-\frac{1}{k^2}\right)>0$,得 $k^2(5k^2+4)>1$,$x_1+x_2=-\frac{10}{5k^2+4}$,$x_1x_2=\frac{\frac{5}{k^2}-20}{5k^2+4}$,

$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\,\frac{4\sqrt{5}\sqrt{5k^2+4-\frac{1}{k^2}}}{5k^2+4}$, …………………… 8分

点 $O$ 到直线 $y=kx+\frac{1}{k}$ 的距离 $d=\frac{\left|\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{k^2+1}}$,所以 $\triangle OPQ$ 的面积为

$S=\frac{1}{2}|PQ|d=\frac{1}{2}\times\sqrt{1+k^2}\frac{4\sqrt{5}\sqrt{5k^2+4-\frac{1}{k^2}}}{5k^2+4}\times\frac{\left|\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{5}\frac{\left|\frac{1}{k}\right|\sqrt{5k^2+4-\frac{1}{k^2}}}{5k^2+4}=2\sqrt{5}\sqrt{\frac{\left(5k^2+4-\frac{1}{k^2}\right)\frac{1}{k^2}}{(5k^2+4)^2}}=$

$2\sqrt{5}\sqrt{\frac{(5k^2+4)k^2-1}{k^4(5k^2+4)^2}}$，…………………………………………………………………………………… 10 分

令 $t=(5k^2+4)k^2$，则 $S=2\sqrt{5}\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}=2\sqrt{5}\sqrt{-\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}}=2\sqrt{5}\sqrt{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\leqslant 2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=\sqrt{5}$，

当 $\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$，即 $t=2$，$(5k^2+4)k^2=2$ 时，等号成立，此时满足 $\Delta>0$，因此△$OPQ$ 的面积的最大值为 $\sqrt{5}$. ……………………… 12 分

22.解：(1)把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $x-7y+8=0$，得直线 $l$ 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-7\rho\sin\theta+8=0$； ……………………… 2 分

把 $x^2+y^2=\rho^2$，$x=\rho\cos\theta$ 代入 $x^2+y^2-4x=0$，得 $\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，即曲线 $C$ 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$. …………………… 5 分

(2)联立 $\rho\cos\theta-7\rho\sin\theta+8=0$ 和 $\rho=4\cos\theta$，得 $4\cos\theta\cos\theta-28\cos\theta\sin\theta+8=0$，$\cos^2\theta-7\cos\theta\sin\theta+2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=0$，

$3\cos^2\theta-7\cos\theta\sin\theta+2\sin^2\theta=0$，$2\tan^2\theta-7\tan\theta+3=0$，$(2\tan\theta-1)(\tan\theta-3)=0$，所以 $\tan\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\tan\theta=3$， …………… 8 分

即 $A$，$B$ 两点对应的极角的正切值分别是 $\frac{1}{2}$ 和 3，于是 $\tan\angle AOB=|\tan(\theta_A-\theta_B)|=\left|\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\times\frac{1}{2}}\right|=1$，

所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{4}$. ……………………………………………………………………………………………………… 10 分

23.解：(1)当 [illegible] 时，不等式 [illegible] 可化为 [illegible]，所以 [illegible]；

当 $-1$ [illegible] 时，不等式 [illegible] 可化为 [illegible]，不等式不成立； ……………………………………………… [illegible] 分

当 [illegible] $-1$ 时，不等式 [illegible] 可化为 [illegible]，所以 [illegible]；

因此不等式 [illegible] 的解集为 [illegible]. ……………………………………………………………………… [illegible] 分

(2) [illegible]，当 $-1$ [illegible] 时，等号成立，所以 [illegible] 的最小值为 [illegible]，于是 $m$ [illegible]，即 [illegible]，令

[illegible]，所以 [illegible].

因为 [illegible]，所以 [illegible]，两边同时加上 [illegible]，

得 $3(x^2+y^2+z^2)\geqslant 2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2$， ……………………………………………………………… 8 分

即 $3(x^2+y^2+z^2)\geqslant(x+y+z)^2$，$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{4}{3}$，

所以当 $x=y=z=\frac{2}{3}$ 时，$x^2+y^2+z^2$ 有最小值 $\frac{4}{3}$，即 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{5}{3}$，$c=-\frac{4}{3}$ 时，$a^2+(b-1)^2+(c+2)^2$ 有最小值 $\frac{4}{3}$. …… 10 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。