

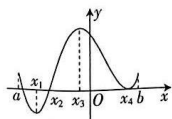
## 数 学

## 注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:人教 A 版选择性必修第二册占 30%,选择性必修第三册占 70%。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 某外语组有 9 人,其中 5 人会英语,4 人会日语,从中选出会英语和日语的各一人,不同的选法有  
A. 16 种                      B. 18 种                      C. 20 种                      D. 91 种
2. 两个变量  $y$  与  $x$  的回归模型中,分别选择了 4 个不同的模型,其中拟合效果最好的模型是  
A. 模型 1 的决定系数  $R^2=0.05$                       B. 模型 2 的决定系数  $R^2=0.49$   
C. 模型 3 的决定系数  $R^2=0.89$                       D. 模型 4 的决定系数  $R^2=0.98$
3. 现有 4 道填空题,学生张三对其中 3 道题有思路,1 道题思路不清晰。有思路的题做对的概率为  $\frac{3}{4}$ ,思路不清晰的题做对的概率为  $\frac{1}{4}$ ,张三从这 4 道填空题中随机选择 1 题,则他做对该题的概率为  
A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{3}{4}$                       C.  $\frac{5}{8}$                       D.  $\frac{1}{8}$
4. 小明收集了五枚不同的铜钱,准备将其串成精美的挂件(如图),根据不同的排放顺序,不同的串法有  
A. 20 种  
B. 25 种  
C. 60 种  
D. 120 种
5. 已知定义在区间  $(a, b)$  上的函数  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ ,  $f'(x)$  的图象如图所示,则  
A.  $f(x)$  在  $(x_1, x_3)$  上单调递增  
B.  $f(x) \leq f(x_3)$   
C. 曲线  $y=f(x)$  在  $x=x_1$  处的切线的斜率为 0  
D.  $f(x)$  最多有 3 个零点
6. 已知由样本数据  $(x_i, y_i)$  ( $i=1, 2, 3, \dots, 10$ ) 组成的一个样本,得到回归直线方程为  $\hat{y}=2x-$

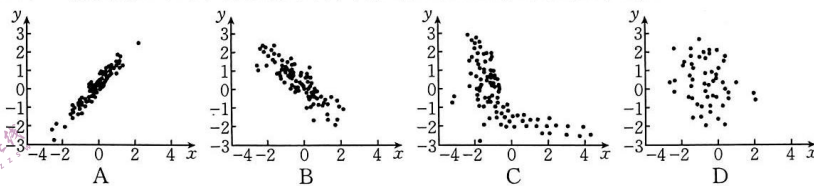


0.4, 且  $\bar{x}=2$ , 去除两个样本点  $(-3, 1)$  和  $(3, -1)$  后, 新得到的回归直线方程斜率为 3, 则样本  $(4, 8)$  的残差为

- A. 0                      B. -1                      C. 1                      D. 2
7. 流感病毒分为甲、乙、丙三型, 甲型流感病毒最容易发生变异, 流感大流行就是甲型流感病毒出现新型或旧型重现引起的. 根据以往的临床记录, 某种诊断甲型流感病毒的试验具有如下的效果: 若以  $A$  表示事件“试验反应为阳性”, 以  $C$  表示事件“被诊断者患有甲型流感”, 则有  $P(A|C)=0.9$ ,  $P(\bar{A}|\bar{C})=0.9$ . 现对自然人群进行普查, 设被试验的人患有甲型流感的概率为 0.005, 即  $P(C)=0.005$ , 则  $P(C|A)=$   
A.  $\frac{9}{208}$                       B.  $\frac{19}{218}$                       C.  $\frac{1}{22}$                       D.  $\frac{7}{108}$
  8. 若将一块体积为  $\frac{4\pi}{3}$  的橡皮泥捏成一个圆锥, 则圆锥的侧面积最小为  
A.  $2\sqrt{3}\pi$                       B.  $2\sqrt{5}\pi$                       C.  $4\pi$                       D.  $\sqrt{17}\pi$

二、选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 在以下 4 幅散点图中,所对应的成对样本数据呈现出线性相关关系的是



10. 随机变量  $X$  的分布列为

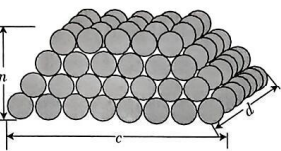
$X$	0	1	2
$P$	$m$	$\frac{1}{2}$	$n$

若  $E(X)=1$ , 则

- A.  $n=\frac{1}{4}$                       B.  $D(X)=\frac{1}{2}$                       C.  $D(2X+1)=4$                       D.  $E(2X+1)=3$
11. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_{2022} < 0$ ,  $S_{2023} > 0$ , 则下列说法正确的是  
A.  $d < 0$                       B.  $a_{1012} > 0$   
C. 数列  $\{S_n\}$  中  $S_{1011}$  最小                      D. 数列  $\{|a_n|\}$  中  $|a_{1011}|$  最小
  12. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  和  $g(x)$  的导函数分别为  $f'(x)$  和  $g'(x)$ , 若  $f(x)=g(\frac{x+1}{2})+x$ , 且  $f(x)$  为偶函数,  $g'(x+1)$  为奇函数, 则  
A.  $f'(1)=1$                       B.  $g'(\frac{1}{2})=4$                       C.  $g'(\frac{3}{2})=2$                       D.  $g'(2)=4$
- 三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。
13.  $(1+x^2)^7$  展开式中  $x^4$  的系数为  $\blacktriangle$ .
  14. 在一次高二数学联考中, 某校数学成绩  $X \sim N(80, \sigma^2)$ . 已知  $P(60 \leq X \leq 80) = 0.25$ , 则从全校学生中任选一名学生, 其数学成绩小于 100 分的概率为  $\blacktriangle$ .

15. 已知曲线  $y=f(x)$  在点  $(0,0)$  处的切线与曲线  $y=\frac{f(x)}{x}$  在点  $(2,1)$  处的切线重合, 则  $f'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 沈括是北宋一名卓越的科学家, 出生于浙江钱塘, 也就是如今的浙江杭州, 他博学多才、善于观察, 在天文、数学、地理、生物、医学、物理领域都有研究, 在数学上开创了“隙积术”. 如图, 这是一底层为长方形的“堆垛”, 堆垛每层长、宽的球的个数都比相邻下层少一个, 其中  $c, d$  为底层长、宽的球的个数,  $n$  为总层数. 若  $c=d=10, n=7$ , 则该堆垛球的总个数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ , 若  $c=2n, d=2n+1$ , 则该堆垛球的总个数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ . (用  $n$  表示, 参考公式:  $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ) (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)



四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知  $\{a_n\}$  是等差数列,  $\{b_n\}$  是等比数列,  $a_2+a_5=a_3+9=8b_1=b_4=16$ .

(1) 求  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的通项公式;

(2) 将  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的项从小到大排序, 组成一个新的数列  $\{c_n\}$ , 记  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $c_k=101$ , 求  $k$  的值, 并求出  $S_k$ .

18. (12 分)

保护知识产权需要将科技成果转化为科技专利, 这样就需要大量的专利代理人员从事专利书写工作, 而物理方向的研究生更受专利代理公司青睐. 通过培训物理方向的研究生, 他们可以书写化学、生物、医学等方面的专利, 而其他方向的研究生只能写本专业方面的专利. 某大型专利代理公司为了更好地、更多地招收研究生来书写专利, 通过随机问卷调查的方式对物理方向的研究生进行了专利代理方向就业意向的调查, 得到的数据如下表:

	喜欢专利代理方向就业	不喜欢专利代理方向就业
男研究生	60	40
女研究生	80	20

(1) 用频率近似概率, 估计从物理方向的研究生中任选 3 人, 求至少有 2 人喜欢专利代理方向就业的概率;

(2) 根据  $\alpha=0.005$  的独立性检验, 能否认为物理方向的研究生专利代理方向就业意向与性别有关联?

附临界值表及参考公式:

$\alpha$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
$\chi^2_{\alpha}$	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n=a+b+c+d.$$

19. (12 分)

将  $A, B, C, D$  这 4 个小球放入 4 个不同的盒子中.

(1) 若  $A, B$  要放入同一个盒子中, 有多少种不同的放法?

(2) 若每个盒子最多只能放 2 个小球, 有多少种不同的放法?

20. (12 分)

某商家为了促销某商品, 制作了一些卡片, 卡片共有 3 种不同的颜色, 顾客每次消费满额都随机赠送 1 张某种颜色的卡片, 集齐 3 张相同颜色的卡片即可兑换该商品一件.

(1) 求某顾客消费满额 4 次后仍未集齐 3 张相同颜色的卡片的概率;

(2) 设某顾客消费满额  $X$  次后刚好集齐 3 张相同颜色的卡片, 求  $X$  的分布列及期望.

21. (12 分)

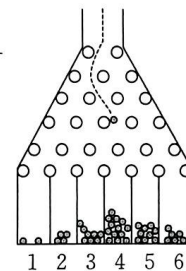
高尔顿板又称豆机、梅花机等, 是英国生物统计学家高尔顿设计用来研究随机现象的模型. 如图所示的高尔顿板为一块木板自上而下钉着 6 层圆柱形小木块, 最顶层有 2 个小木块, 以下各层小木块的个数依次递增, 各层小木块互相平行但相互错开, 小木块之间留有适当的空隙作为通道, 前面挡有一块透明玻璃. 让小球从高尔顿板上方的通道口落下, 小球在下落过程中与层层小木块碰撞, 且等可能向左或者向右滚下, 最后落入高尔顿板下方从左至右编号为  $1, 2, \dots, 6$  的球槽内.

(1) 某商店将该高尔顿板改良成游戏机, 针对某商品推出促销活动. 凡是入店购买该商品一件, 就可以获得一次游戏机会. 若小球落入  $X$  号球槽, 该商品可立减  $Y$  元, 其中  $Y=|20-5X|$ . 若该商品的成本价是 10 元, 从期望的角度考虑, 为保证该商品总体能盈利, 求该商品的最低定价. (结果取整数)

(2) 将 79 个小球依次从高尔顿板上方的通道口落下, 试问 3 号球槽中落入多少个小球的概率最大?

附: 设随机变量  $\xi \sim B(n, p)$ , 则  $\xi$  的分布列为  $P(\xi=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0, 1, 2, \dots, n$ .

$$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)} = \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}.$$



22. (12 分)

已知函数  $f(x) = \ln(x+1)$ .

(1) 求函数  $g(x) = f(x) - \frac{x}{4} - 1$  的最大值;

(2) 证明: 当  $x > 0$  时,  $f(x) < \frac{e^x - 1}{x^2}$ .

(参考数据:  $\ln 2 \approx 0.69$ )