密★启用前

武汉市部分重点中学四月联考

理科数学

本试题卷共 4 页,23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后,请将答题卡上交。

第Ⅰ卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是满足题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x<1\}$,$B=\{x\in\mathbf{N}|\ln x<1\}$,则 $(\complement_{R}A)\cap B=$

A. $\{2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

2. 设复数 z 满足 $\frac{z+i}{2+i}=i$,则 $|z|=$

A. 2　　B. $\sqrt{5}-1$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

3. ①只有甲参加,乙和丙才会在一起吃饭;②甲只到自己家附近的餐馆吃饭,那里距市中心有几公里远;③只有乙参加,丁才会去餐馆吃饭. 若以上叙述都正确,则下列论断也一定正确的是

A. 甲不会与丁一起在餐馆吃饭　　B. 丙不会与甲、丁一起在餐馆吃饭

C. 乙不会在市中心吃饭　　D. 丙和丁不会一起在市中心吃饭

4. 在某校高三年级的高考全真模拟考试中,所有学生考试成绩的取值 X(单位:分)是服从正态分布 $N(502,144)$ 的随机变量,模拟"重点控制线"为 490 分(490 分及 490 分以上都是重点),若随机抽取该校一名高三考生,则这位同学的成绩不低于"重点控制线"的概率为

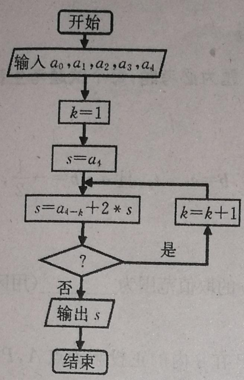
(附:若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6826$,$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544$,$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.9974$).

A. 0.6826　　B. 0.6587　　C. 0.8413　　D. 0.3413

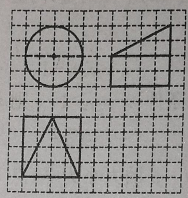
5. 秦九韶算法是中国古代数学史上的一个"神机妙算",它将一元 n 次多项式转化为 n 个一次式的算法,大大简化了计算过程,即使在现代用计算机解决多项式求值问题时,秦九韶算法依然是最优的

算法.如图所示的程序框图展示了 $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 求值的秦九韶算法，那么判断框可以填入的条件和输出结果 s 表示的值分别是

A. $k<4, f(2)$　　B. $k\leqslant 3, f(a_4)$　　C. $k\leqslant 3, f(a_0)$　　D. $k\leqslant 4, f(2)$



第 5 题图

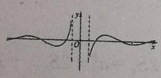


第 6 题图

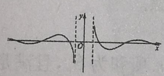
6. 某几何体的三视图如图所示，图中每一个小方格均为正方形，且边长为 1，则该几何体的体积为

A. 8π　　B. $\frac{32\pi}{3}$　　C. $\frac{28}{3}\pi$　　D. 12π

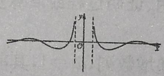
7. 函数 $f(x)=\cos x\cdot\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ 的大致图象有可能是



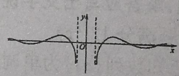
A.



B.



C.



D.

8. 锐角$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1，边 $AC=\sqrt{3}$，$BC>AB$，且满足 $\cos A\cos C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，则 $C=$

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{12}$

9. $(2+\frac{1}{\sqrt{x}})(2-\sqrt[4]{x})^6$ 展开式中除 x 一次项外的各项系数的和为

A. 121　　B. -118　　C. 61　　D. -58

10. 已知以双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F 为圆心，以 a 为半径的圆与直线 $y=\frac{b}{a}x$ 交于 A,B 两点，若 $|AB|=\sqrt{2}a$，则双曲线 C 的离心率为

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

11. 将函数 $y=\sin(2x+\frac{3\pi}{4})$ 图象上的点 $P(-\frac{\pi}{4},t)$ 向右平移 $s(s>0)$ 个单位长度后得到点 P'，若点 P' 在函数 $y=-\sin 2x$ 的图象上，则

A. $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$，s 的最小值为 $\frac{\pi}{8}$　　B. $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$，s 的最小值为 $\frac{7\pi}{8}$

C. $t=\frac{1}{2}$，s 的最小值为 $\frac{\pi}{8}$　　D. $t=\frac{1}{2}$，s 的最小值为 $\frac{7\pi}{8}$

12. 若 $m\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x-\frac{m}{x}-2\ln x$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则 mx_2 的取值范围为

A. $(0,\frac{32}{27}]$　　B. $(1,\frac{32}{27}]$　　C. $(\frac{32}{27},2]$　　D. $(1,2]$

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分。

13. 若 e_1,e_2 是夹角为 θ 的单位向量，向量 $\boldsymbol{a}=e_1+2e_2$，$\boldsymbol{b}=e_1-e_2$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$，则 $\theta=$________（用弧度制表示）.

14. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant-1,\\x+y\geqslant1,\\2x-y\leqslant2,\end{cases}$ 则 $z=3x-2y$ 的取值范围为________（用区间表示）.

15. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$，点 $P\in\alpha$，点 P 在 β 内的正投影为点 A，$PA=2\sqrt{3}$，过点 A 作 $AB\perp l$，垂足为点 B，点 $C\in l$，$BC=2\sqrt{2}$，点 $D\in\beta$，且四边形 $ABCD$ 满足 $\angle BCD+\angle DAB=\pi$. 若四面体 $PACD$ 的四个顶点都在同一球面上，则该球的体积为________.

16. 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 $(2,0)$ 的直线交抛物线于 A,B 两点，与抛物线准线交于点 C，若 $\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}}=\frac{2}{5}$，则 $|AF|=$________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，$a_1=1$，其前 n 项和为 S_n，且满足 $2S_n=a_n^2-2S_{n-1}+1(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

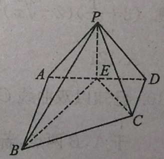
（Ⅱ）若数列 $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，其前 n 项和为 T_n，若 $T_n>\frac{9}{19}$ 成立，求 n 的最小值.

18.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 P-$ABCD$ 中，$\triangle PAD$ 为等边三角形，$AB\parallel CD$，$\angle BAD=90°$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，点 E 为 AD 的中点，连接 PE,EB,EC.

（Ⅰ）求证：平面 $PEC\perp$ 平面 EBC；

（Ⅱ）若 $AB=2CD$，$\frac{AB}{PA}=\lambda\ (\lambda>0)$，且二面角 P-BC-E 的平面角为 $\frac{\pi}{3}$，求实数 λ 的值.



第 18 题图

19.（本小题满分 12 分）

随着"北京八分钟"在韩国平昌冬奥会惊艳亮相，冬奥会正式进入了北京周期，全社会对冬奥会的热情空前高涨.

（Ⅰ）为迎接冬奥会，某社区积极推动冬奥项目在社区青少年中的普及，并统计了近五年来本社区冬奥项目青少年爱好者的人数 y_i（单位：人）与时间 t_i（单位：年），列表如下：

t_i	1	2	3	4	5
y_i	24	27	41	64	79

依据表格给出的数据,是否可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系,请计算相关系数 r 并加以说明(计算结果精确到 0.01).

(若 $|r|>0.75$,则线性相关程度很高,可用线性回归模型拟合)

附:相关系数公式 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\bar{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$,参考数据 $\sqrt{5695}\approx 75.47$.

(Ⅱ)某冰雪运动用品专营店为吸引广大冰雪爱好者,特推出两种促销方案.

方案一:每满 600 元可减 100 元;

方案二:金额超过 600 元可抽奖三次,每次中奖的概率同为 $\frac{1}{2}$,且每次抽奖互不影响,中奖 1 次打 9 折,中奖 2 次打 8 折,中奖 3 次打 7 折.

(ⅰ)两位顾客都购买了 1050 元的产品,并且都选择第二种优惠方案,求至少有一名顾客比选择方案一更优惠的概率;

(ⅱ)如果你打算购买 1000 元的冰雪运动用品,请从实际付款金额的数学期望的角度分析应该选择哪种优惠方案.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,A,B 是椭圆 C 上的两个不同点.

(Ⅰ)若 $OA\perp OB$,且点 A,B 所在直线方程为 $y=x+m(m>0)$,求 m 的值;

(Ⅱ)若直线 OA,OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$,线段 OA 上有一点 M 满足 $\frac{|OM|}{|OA|}=\frac{2}{3}$,连接 BM 并延长交椭圆 C 于点 N,求 $\frac{|BM|}{|BN|}$ 的值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2(a\neq 0)$.

(Ⅰ)若 $a=1$,证明:$f(x)+x\leqslant 0$;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 只有一个极值点 x_0,求 a 的取值范围,并证明:$f(x_0)>-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

请考生在第 22,23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分)选修 4—4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=1+\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 在极坐标系中有射线 $l:\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\geqslant 0)$ 和曲线 $C_2:\rho(\sin\theta+2\cos\theta)=\rho^2\cos^2\theta+m$.

(Ⅰ)判断射线 l 和曲线 C_1 公共点的个数;

(Ⅱ)若射线 l 与曲线 C_2 交于 A,B 两点,且满足 $|OA|=|AB|$,求实数 m 的值.

23. (本小题满分 10 分)选修 4—5:不等式选讲

已知 $m>0$,函数 $f(x)=|x+1|+|x-m|$ 的最小值为 3.

(Ⅰ)求 m 的值;

(Ⅱ)若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=m$,求证:$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant 2ab+2bc+2ca-3abc$.