2021年广州市普通高中毕业班综合测试（二）

数学试题参考答案及评分标准

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	D	C	B	B	C

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

9. BD　　10. ABD　　11. ACD　　12. B

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．3　　14．3　　15．3　　16．$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$

四、解答题：本题共6小题，共70分．

17．（10分）

（1）解法1：由 $S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$，得 $S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})$，…………………1分

得 $a_{n+1}=2a_n\ (n\geq 2)$，…………………2分

即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2\ (n\geq 2)$，…………………3分

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $q=2$．…………………4分

因为 $a_1=1$，

所以 $a_n=2^{n-1}$．…………………5分

解法2：由 $S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$，得 $S_3+2S_1=3S_2$，…………………1分

得 $a_1+a_2+a_3+2a_1=3(a_1+a_2)$，

整理得 $a_3=2a_2$，即 $\frac{a_3}{a_2}=2$. ……………………………3 分

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $q=\frac{a_3}{a_2}=2$. ……………………………4 分

因为 $a_1=1$，

所以 $a_n=2^{n-1}$. ……………………………5 分

解法 3：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

若 $q=1$，由于 $a_1=1$，则 $a_n=1$，$S_n=n$. ……………………………1 分

因而 $S_{n+1}+2S_{n-1}=(n+1)+2(n-1)=3n-1\neq 3S_n(n\geq 2)$，与题设 $S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$ 矛盾，

所以 $q\neq 1$. ……………………………2 分

由 $S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$，

得 $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+2\times\frac{1-q^{n-1}}{1-q}=3\times\frac{1-q^n}{1-q}$， ……………………………3 分

解得 $q=2$. ……………………………4 分

因为 $a_1=1$，所以 $a_n=2^{n-1}$. ……………………………5 分

（2）解法 1：由（1）得 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. ……………………………6 分

则 $S_{n+1}=2^{n+1}-1$. ……………………………7 分

所以 $b_n=\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$. ……………………………8 分

所以 $T_n=\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$ ……………9 分

$=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$. ……………………………10 分

解法 2：由（1）得 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. ……………………………6 分

因为 $b_n=\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}$

$=\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$. ……………………………8 分

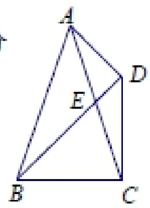
所以 $T_n=\left(\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_2}\right)+\left(\dfrac{1}{S_2}-\dfrac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}\right)$ ……………………………9 分

$=\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$. ……………………………10 分

18. (12 分)

（1）解：因为△ BCD 是等腰直角三角形，$\angle BCD=90^\circ$，$BD=2$，



所以 $BC=CD=\sqrt{2}$，$\angle CBD=\angle CDB=45^\circ$. …………1 分

因为 $\angle ADB=90^\circ$，$\sin\angle ABD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $0^\circ<\angle ABD<90^\circ$，$\cos\angle ABD=\sqrt{1-\sin^2\angle ABD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， ………2 分

$AB=\dfrac{BD}{\cos\angle ABD}=\sqrt{5}$，$AD=AB\sin\angle ABD=1$. ……………………………4 分

在△ ACD 中，$\angle ADC=135^\circ$，

由余弦定理得 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos 135^\circ}$

$=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times1\times\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

$=\sqrt{5}$. ……………………………5 分

由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin 135^\circ}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$，

得 $\sin\angle ACD=\dfrac{1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………………6 分

（2）解法 1：在△ ACD 中，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$，

得 $\sin\angle CAD=\dfrac{CD\cdot\sin\angle ACD}{AD}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

由于 $0^\circ<\angle CAD<90^\circ$，得 $\cos\angle CAD=\sqrt{1-\sin^2\angle CAD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. …………8 分

所以 $\tan\angle CAD=\dfrac{\sin\angle CAD}{\cos\angle CAD}=\dfrac{1}{2}$. …………………………9 分

在 Rt△ ADE 中， $DE=AD\cdot\tan\angle CAD=\dfrac{1}{2}$，

$S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot DE=\dfrac{1}{4}$. …………………………10 分

在 Rt△ ABD 中， $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot BD=1$. …………………………11 分

所以△ ABE 的面积为 $S=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ADE}=\dfrac{3}{4}$. …………………………12 分

解法 2：由（1）知 $AC=AB=\sqrt{5}$， $BC=\sqrt{2}$，

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot\sqrt{AB^2-\left(\dfrac{1}{2}BC\right)^2}=\dfrac{3}{2}$. …………………………7 分

由于 $S_{\triangle ABE}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BE\cdot\sin\angle ABD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\cdot BE\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{1}{2}BE$， …………8 分

$S_{\triangle CBE}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot BE\cdot\sin\angle CBD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\cdot BE\cdot\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}BE$， ……………9 分

所以 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CBE}$. …………………………10 分

因为 $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CBE}=S_{\triangle ABC}$， …………………………11 分

所以△ ABE 的面积为 $S_{\triangle ABE}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\dfrac{3}{4}$. …………………………12 分

解法 3：由 $\sin\angle ACD=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$， 且 $0^\circ<\angle ACD<90^\circ$，

得 $\cos\angle ACD=\sqrt{1-\sin^2\angle ACD}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. …………………………7 分

在△ CDE 中， $\angle CED=180^\circ-\angle ACD-\angle CDB=135^\circ-\angle ACD$，

则 $\sin\angle CED=\sin\left(135^\circ-\angle ACD\right)$

$=\sin 135^\circ\cos\angle ACD-\cos 135^\circ\sin\angle ACD$ ……………………8 分

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………………………9 分

由正弦定理得 $\dfrac{DE}{\sin\angle ACD}=\dfrac{CD}{\sin\angle CED}$,

得 $DE=\dfrac{CD\cdot\sin\angle ACD}{\sin\angle CED}=\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………10 分

所以 $BE=BD-DE=\dfrac{3}{2}$. ……………………………11 分

所以△ ABE 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot AB\cdot\sin\angle ABD=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3}{4}$.…12 分

解法 4：由 $\sin\angle ACD=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，且 $0^\circ<\angle ACD<90^\circ$，

得 $\cos\angle ACD=\sqrt{1-\sin^2\angle ACD}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. ……………………………7 分

因为 $\angle ACB=\angle BCD-\angle ACD=90^\circ-\angle ACD$，

所以 $\cos\angle ACB=\cos\left(90^\circ-\angle ACD\right)=\sin\angle ACD=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$， ……………………8 分

$\sin\angle ACB=\sin\left(90^\circ-\angle ACD\right)=\cos\angle ACD=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. ……………………9 分

在△ BCE 中，$\angle BEC=180^\circ-45^\circ-\angle ACB=135^\circ-\angle ACB$，

则 $\sin\angle BEC=\sin\left(135^\circ-\angle ACB\right)$

$=\sin135^\circ\cos\angle ACB-\cos135^\circ\sin\angle ACB$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………………………10 分

由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin\angle BEC}=\dfrac{BE}{\sin\angle ACB}$,

得 $BE=\dfrac{BC\cdot\sin\angle ACB}{\sin\angle BEC}=\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{3}{2}$. ……11 分

所以△ ABE 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot AB\cdot\sin\angle ABD=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3}{4}$.…12 分

19.（12 分）

（1）解：由散点图中数据和附注中参考数据得 $\bar{t}=5$，$\sum_{i=1}^{9}\left(t_i-\bar{t}\right)^2=60$，

$\bar{y}=\dfrac{54.2}{9}\approx 6.02$， ……3 分

得 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{9}t_iy_i-9\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{9}\left(t_i-\bar{t}\right)^2}=\dfrac{183.6-5\times 54.2}{60}=\dfrac{-87.4}{60}\approx -1.46$， ……5 分

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=6.02-(-1.46)\times 5=13.32$. ……6 分

所以 y 关于 t 的回归直线方程为 $\hat{y}=-1.46t+13.32$. ……7 分

（2）解：由题意 $X\sim N(1.6,0.36)$，$P(X>\mu-2\sigma)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{0.9544}{2}=0.9772$，……9 分

所以 $\mu-2\sigma=1.6-2\times 0.6=0.4$ 时，满足题意. ……11 分

所以该地区最低人均年纯收入标准大约为 0.4 万元. ……12 分

20. (12 分)

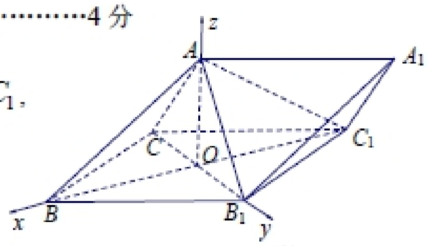
（1）证明：记 $BC_1\cap B_1C=O$，连结 AO，

因为侧面 BB_1C_1C 是菱形，所以 $B_1C\perp BC_1$，$BB_1=BC$. ……1 分

因为 $\angle ABB_1=\angle ABC$，$AB=AB$，所以△ $ABB_1\cong$△ ABC. ……2 分

所以 $AB_1=AC$. ……3 分

因为 O 是 B_1C 的中点，所以 $AO\perp B_1C$.……4 分



因为 $AO\cap BC_1=O$，$AO\subset$ 平面 ABC_1，$BC_1\subset$ 平面 ABC_1，

所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1. ……5 分

（2）解法 1：

因为 $AB=AC_1$，O 为 BC_1 的中点，所以 $AO\perp BC_1$.

由（1）可知 $B_1C\perp AO$，因为 $BC_1\cap B_1C=O$，

所以 $AO\perp$ 面 BB_1C_1C. ……………………………7 分

以 O 为原点建立如图的空间直角坐标系 $O-xyz$，设 $AO=t$， ……………………………8 分

因为 $BB_1=B_1C=2$，所以 $B_1O=1$， $BO=\sqrt{3}$.

则 $B\left(\sqrt{3},0,0\right)$， $B_1(0,1,0)$， $C(0,-1,0)$， $A(0,0,t)$，

$\overrightarrow{B_1A}=(0,-1,t)$， $\overrightarrow{B_1B}=\left(\sqrt{3},-1,0\right)$， $\overrightarrow{BA}=\left(-\sqrt{3},0,t\right)$， $\overrightarrow{CA}=(0,1,t)$

设平面 AB_1B 的法向量为 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$，则有

$n_1\cdot\overrightarrow{B_1A}=-y_1+tz_1=0$， $n_1\cdot\overrightarrow{B_1B}=\sqrt{3}x_1-y_1=0$，

令 $y_1=\sqrt{3}$，得平面 AB_1B 的一个法向量为 $n_1=\left(1,\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{t}\right)$. ……………………………9 分

设平面 ABC 的法向量为 $n_2=(x_2,y_2,z_2)$，则有

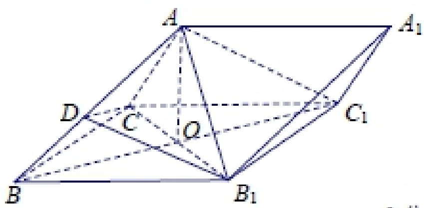
$n_2\cdot\overrightarrow{BA}=-\sqrt{3}x_2+tz_2=0$， $n_2\cdot\overrightarrow{CA}=y_2+tz_2=0$，

令 $x_2=\sqrt{3}$，则 $y_2=-3$， $z_2=\dfrac{3}{t}$.

则平面 ABC 的一个法向量为 $n_2=\left(\sqrt{3},-3,\dfrac{3}{t}\right)$. ……………………………10 分

由题意知 $n_1\cdot n_2=\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\dfrac{3\sqrt{3}}{t^2}=0$，解得 $t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………11 分

所以 $V_{C_1-ABB_1}=V_{A-BB_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times AO\times S_{\Delta BB_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………12 分



解法 2：作 $CD\perp AB$ 于 D，连接 B_1D，

由（1）知 $\triangle ABB_1\cong\triangle ABC$，

所以 $B_1D\perp AB$， $CD=B_1D$. ……………………………6 分

所以 $\angle B_1DC$ 是二面角 B_1-AB-C 的平面角，依题意得 $\angle B_1DC=90^\circ$. …………7 分

因为 $BB_1=B_1C=2$，所以 $CD=B_1D=\sqrt{2}$.

因为 $AB = AC_1$，O 为 BC_1 的中点，所以 $AO \perp BC_1$. ……………………………8 分

由（1）可知 $B_1C \perp AO$，因为 $BC_1 \cap B_1C = O$，所以 $AO \perp$ 面 BB_1C_1C. …………9 分

设 $AO = x$，在 Rt△ AOB_1 中，$AB_1^2 = B_1O^2 + AO^2 = 1 + x^2$， ………………………10 分

在 Rt△ ADB_1 中，$AD = \sqrt{AB_1^2 - B_1D^2} = \sqrt{x^2 - 1}$，

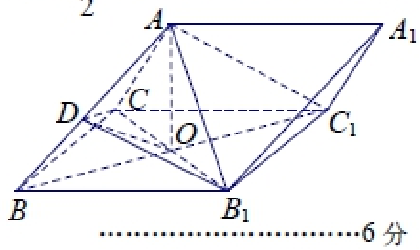
在 Rt△ AOB 中，$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{x^2 + 3}$，

在 Rt△ BDB_1 中，$BD = \sqrt{BB_1^2 - B_1D^2} = \sqrt{2}$，

因为 $AB = BD + AD$，

则 $\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{2}$，解得 $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………11 分

所以 $V_{C_1-ABB_1} = V_{A-BB_1C_1} = \dfrac{1}{3} \times AO \times S_{\Delta BB_1C_1} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………12 分



解法 3：作 $CD \perp AB$ 于 D，连接 B_1D，DO，

由（1）知 △ $ABB_1 \cong$ △ ABC，

所以 $B_1D \perp AB$，$CD = B_1D$. ……………………………6 分

所以 $\angle B_1DC$ 是二面角 $B_1 - AB - C$ 的平面角，依题意得 $\angle B_1DC = 90^\circ$. …………7 分

又 $CD \cap B_1D = D$，则 $AB \perp$ 平面 CDB_1.

因为 $DO \subset$ 平面 CDB_1，所以 $DO \perp AB$. ……………………………8 分

因为 $BB_1 = B_1C = 2$，所以 $CD = B_1D = \sqrt{2}$，$DO = 1$，$BO = \sqrt{3}$.

在 Rt△ BDB_1 中，$BD = \sqrt{BB_1^2 - B_1D^2} = \sqrt{2}$.

因为 Rt△ AOB ∼ Rt△ BOD，

所以 $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{DO}{BD}$，得 $AO = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………9 分

因为 $AB = AC_1$，O 为 BC_1 的中点，所以 $AO \perp BC_1$. ……………………………10 分

由（1）可知 $B_1C \perp AO$，因为 $BC_1 \cap B_1C = O$，所以 $AO \perp$ 面

所以$V_{C_1-ABB_1}=V_{A-BB_1C_1}=\frac{1}{3}\times AO\times S_{\Delta BB_1C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ························12 分

21.（12 分）

（1）解：设$B(x_0,y_0)$是抛物线C上的任一点，则$x_0^2=2py_0$. ····························1 分

$$|AB|=\sqrt{(x_0-0)^2+(y_0-p)^2}$$

$$=\sqrt{2py_0+y_0^2-2py_0+p^2}$$

$$=\sqrt{y_0^2+p^2}.$$ ····························2 分

因为$y_0\geq 0$，

所以当$y_0=0$时，$|AB|_{\min}=\sqrt{p^2}=p$. ····························3 分

依题意，得$p=2$.

所以C的方程为$x^2=4y$. ····························4 分

（2）解法 1：因为点F是C的焦点，所以$F(0,1)$. ····························5 分

根据题意，直线l_1的斜率k存在且$k\neq 0$，设$l_1:y=kx+1$，

由于$l_1\perp l_2$，则$l_2:y=-\frac{1}{k}x+1$.

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$S(x',y')$，

由$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$消去$y$，得$x^2-4kx-4=0$，

$\Delta=(4k)^2-4\times(-4)=16(k^2+1)>0$，

则$x_1+x_2=4k$. ····························6 分

因为S是线段MN的中点，

所以$x'=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$，$y'=kx'+1=2k^2+1$.

所以$S(2k,2k^2+1)$. ····························7 分

同理得$T\left(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+1\right)$.

则直线 ST 的斜率为 $k'=\dfrac{\left(2k^2+1\right)-\left(\dfrac{2}{k^2}+1\right)}{2k-\left(-\dfrac{2}{k}\right)}=\dfrac{k^2-1}{k}$. ……………………………9 分

则直线 ST 的方程为 $y-\left(2k^2+1\right)=\dfrac{k^2-1}{k}\left(x-2k\right)$,

得 $y=\dfrac{k^2-1}{k}x+3$. ……………………………10 分

所以直线 ST 恒过定点 $\left(0,3\right)$. ……………………………11 分

所以存在定圆 $H:x^2+\left(y-3\right)^2=r^2$($r$ 为常数，且 $r\neq0$)，使得直线 ST 截圆 H 所得

的线段长恒为定值 $2|r|$. ……………………………12 分

解法 2：因为点 F 是 C 的焦点，所以 $F\left(0,1\right)$. ……………………………5 分

根据题意，直线 l_1 的斜率 k 存在且 $k\neq0$，设 $l_1:y=kx+1$,

由于 $l_1\perp l_2$，则 $l_2:y=-\dfrac{1}{k}x+1$.

设 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，$S\left(x',y'\right)$,

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-4kx-4=0$,

$\Delta=\left(4k\right)^2-4\times\left(-4\right)=16\left(k^2+1\right)>0$,

则 $x_1+x_2=4k$. ……………………………6 分

因为 S 是线段 MN 的中点，

所以 $x'=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2k$，$y'=kx'+1=2k^2+1$.

所以 $S\left(2k,2k^2+1\right)$. ……………………………7 分

同理得 $T\left(-\dfrac{2}{k},\dfrac{2}{k^2}+1\right)$. ……………………………8 分

设点 $H\left(0,3\right)$,

由于$k_{SH}=\dfrac{2k^2+1-3}{2k}=\dfrac{k^2-1}{k}$， $k_{TH}=\dfrac{\frac{2}{k^2}+1-3}{-\frac{2}{k}}=\dfrac{k^2-1}{k}$， ……………9 分

所以$k_{SH}=k_{TH}$． ……………………………10 分

所以S，T，H三点共线.

所以直线ST恒过点H． ……………………………11 分

所以存在定圆$H:x^2+(y-3)^2=r^2$(r为常数，且$r\neq 0$)，使得直线ST截圆H所得的线段长恒为定值$2|r|$． ……………………………12 分

22. (12 分)

（1）解：函数$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+2a(x-1)=\dfrac{2ax^2+1-2a}{x+1}$.

……………………………1 分

① 若$1-2a\geq 0$，即$0<a\leq\dfrac{1}{2}$，则$f'(x)\geq 0$对$x\in(-1,+\infty)$恒成立，

所以$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增； ……………………………2 分

② 若$1-2a<0$，即$a>\dfrac{1}{2}$，则方程$2ax^2+1-2a=0$的两根为$x=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$；

当$-1<x<-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$时，$f'(x)>0$；

当$-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}<x<\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$时，$f'(x)<0$；

当$x>\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$时，$f'(x)>0$；

所以函数$f(x)$在$\left(-1,-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}\right)$上单调递增，在$\left(-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}},\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}\right)$上单调递减，

在$\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递增. ……………………………3 分

综上所述，当$0<a\leq\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增；

当$a>\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$\left(-1,-\sqrt{1-\frac{1}{2a}}\right)$上单调递增，在$\left(-\sqrt{1-\frac{1}{2a}},\sqrt{1-\frac{1}{2a}}\right)$上单调递减，

在$\left(\sqrt{1-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递增. ……………………………4 分

（2）证明：当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}(x-1)^2$，

由（1）知$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即对任意$x\in(0,+\infty)$，有$f(x)>f(0)=\frac{1}{2}$，

即$2\ln(x+1)+(x-1)^2>1$，整理得$2x-x^2<2\ln(x+1)$. ……………………………5 分

令$x=\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots,n)$，则$\frac{2k-1}{k^2}<2\ln\frac{1+k}{k}$. ……………………………6 分

累加得$1+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}<2\left(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\right)=2\ln(n+1)$.

……………………………7 分

下面证明：对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$\ln(n+1)<\frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

记函数$h(t)=2t\ln t-t^2+1(t>1)$，则$h'(t)=2(\ln t-t+1)$，$[h'(t)]'=2\left(\frac{1}{t}-1\right)$，

当$t>1$时，$[h'(t)]'<0$，故函数$h'(t)$在区间$(1,+\infty)$上单调递减.

所以$h'(t)<h'(1)=0$. ……………………………8 分

故函数$h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$h(t)<h(1)=0$.

即对$t>1$，有$2t\ln t<t^2-1$， ……………………………9 分

令$t=\sqrt{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$2\sqrt{n+1}\cdot\ln\sqrt{n+1}<\left(\sqrt{n+1}\right)^2-1=n$. ……………………10 分

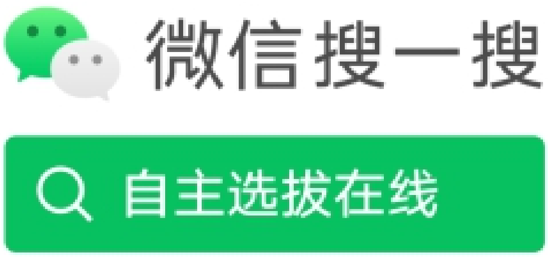
所以$\ln(n+1)<\frac{n}{\sqrt{n+1}}$. ……………………………11 分

所以$1+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}<\frac{2n}{\sqrt{n+1}}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》