中学生标准学术能力诊断性测试 2020 年 11 月测试

理科数学（一）卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\},B=\{2,4,6\},U=\{1,2,3,4,5,6\}$，则 $(C_U A)\cup(C_U B)=$

A. $\{5\}$　　B. $\{1,3,5,6\}$　　C. $\{1,3,5\}$　　D. $\{2,4,6\}$

2. 已知双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，则其对应的双曲线方程不可能为

A. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　B. $y^2-\frac{x^2}{4}=1$　　C. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　D. $x^2-4y^2=6$

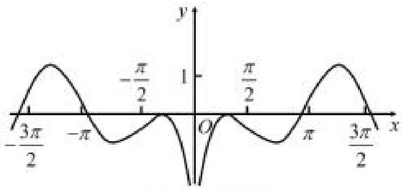
3. 设复数 z 满足方程 $|\bar{z}|\cdot z+|z|\cdot\bar{z}=4$，其中 $\bar{z}$ 为复数 z 的共轭复数，若 z 的实部为 $\sqrt{2}$，则 $|z|$ 为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

4. 已知函数 $f(x)$ 的局部图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可以是

A. $f(x)=e^{\frac{1}{|x|}}\cdot\sin\frac{\pi}{2}x$　　B. $f(x)=e^{\frac{1}{|x|}}\cdot\cos\frac{\pi}{2}x$

C. $f(x)=\ln|x|\cdot\sin\frac{\pi}{2}x$　　D. $f(x)=\ln|x|\cdot\cos\frac{\pi}{2}x$



（第 4 题图）

5. $(2x-\sqrt[3]{x})^6$ 的展开式中，x^4 的系数是

A. 20　　B. -20　　C. 160　　D. -160

6. 从 1~9 这 9 个数字中，选取 4 个数字，组成含有 1 对重复数字的五位数的种数有

A. 30240　　B. 60480　　C. 15120　　D. 630

7. “$x>1$”是“$\ln x>\frac{x-1}{x}$”的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

8. 已知$0<a<\frac{1}{3}$，随机变量ξ的分布列如下，当a增大时

ξ	-1	0	1
P	a	$\frac{1}{3}-a$	$\frac{2}{3}$

A. $E(\xi)$增大，$D(\xi)$增大　　B. $E(\xi)$减小，$D(\xi)$增大

C. $E(\xi)$增大，$D(\xi)$减小　　D. $E(\xi)$减小，$D(\xi)$减小

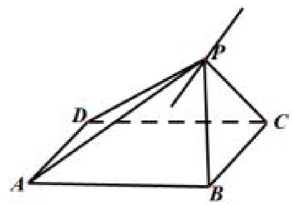
9. 已知实数x,y满足$2x>y>0$，且$\frac{1}{2x-y}+\frac{1}{x+2y}=1$，则$x+y$的最小值为

A. $\frac{3+2\sqrt{3}}{5}$　　B. $\frac{4+2\sqrt{3}}{5}$　　C. $\frac{2+4\sqrt{3}}{5}$　　D. $\frac{3+4\sqrt{3}}{5}$

10. 已知点P是矩形$ABCD$所在平面外一点，且满足$PC=PD$，平面$PAD\cap$平面$PBC=l$，设直线CP与直线DP所成角的大小为α，直线CP与平面PAD所成角的大小为β，二面角$A-l-B$的大小为γ，则下列判断正确的是

A. $\alpha\geq\beta\geq\gamma$　　B. $\gamma\geq\alpha\geq\beta$

C. $\alpha\geq\gamma\geq\beta$　　D. $\beta\geq\alpha\geq\gamma$



（第 10 题图）

11. 已知函数$f(x)=e^x+\ln x-ax-b$，则下列说法正确的是

A.存在$a,b\in R$，函数$f(x)$没有零点

B.任意$b\in R$，存在$a>0$，函数$f(x)$恰有 1 个零点

C.任意$a>0$，存在$b\in R$，函数$f(x)$恰有 2 个零点

D.任意$b\in R$，存在$a>0$，函数$f(x)$恰有 3 个零点

12. 已知a_1,a_2,a_3,a_4成等比数列，且$a_1+a_2+a_3+a_4=(a_1+a_2+a_3)^2$，若$a_1>1$，则

A. $a_1<a_3,a_2<a_4$　　B. $a_1>a_3,a_2<a_4$　　C. $a_1<a_3,a_2>a_4$　　D. $a_1>a_3,a_2>a_4$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\tan\alpha = 2\sin 2\alpha, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，则 $\tan 2\alpha =$________.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3-|x+2|, x \le 0 \\ \ln x, x > 0 \end{cases}$，则满足 $f(a) \ge 1$ 的实数 a 的取值范围是________.

15. 已知 ΔABC 的重心为 $G, \overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = \mu\overrightarrow{AC}$，其中 $0 < \lambda, \mu \le 1$，且 D,G,E 共线，则 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$

=________.

16. 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$，直线 l 过点 $(1,0)$ 且与椭圆交于 A,B 两点，O 为坐标原点，则 ΔAOB 的面积的最大值为________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. （12 分）已知函数 $f(x) = \sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}, x \in R$.

（1）当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，求 $f(x)$ 的值域；

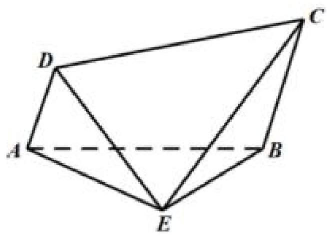
（2）在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，其中 $c=2$，锐角 A 满足：$f\left(\frac{A}{4}\right) = \frac{1}{2}$．点 D 满足：$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DC}, BD = \sqrt{7}DC$，求 ΔABC 的面积.

18. （12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = (n-1)\cdot 2^n + 1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$\frac{a_1}{S_1} + \frac{a_2}{S_2} + \cdots + \frac{a_n}{S_n} \le \frac{n}{2} + 1$.

19. （12 分）在多面体 $ABCDE$ 中，$AD = BE = 1, AB = BC = 2, AD // BC$，$\angle DAB = \frac{\pi}{3}, \angle ABE = \frac{\pi}{2}$，平面 $ABCD \perp$ 平面 ABE.



（第 19 题图）

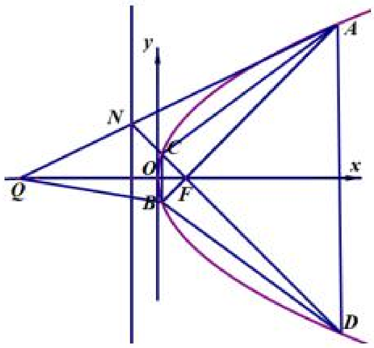
（1）证明：$BC \perp DE$；

（2）求直线 BC 与平面 DCE 所成角的正弦值.

20. （12 分）如图所示，过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作互相垂直的直线 l_1,l_2，l_1 交抛物线于 A,B 两点（A 在 x 轴上方），l_2 交抛物线于 C,D 两点，交其准线于点 N．

（1）求四边形 $ACBD$ 的面积的最小值；

（2）若直线 AN 与 x 轴的交点为 Q，求 ΔAQB 面积的最小值.



（第 20 题图）

21. （12 分）已知函数 $f(x)=xe^x(x\in R)$，其中 e 为自然对数的底数.

（1）当 $x>1$ 时，证明：$f(x-1)-(1-x)\ln x>2x^2-3x+1$；

（2）设实数 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$ 是函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}a(x+1)^2$ 的两个零点，求实数 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22. （10 分）[选修 4−4：极坐标与参数方程] 在直角坐标系中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\varphi\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）．以原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，点 P 的极坐标为 $\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（1）求点 P 的直角坐标，并求曲线 C 的普通方程；

（2）设直线 l 与曲线 C 的两个交点为 A,B，求 $|PA|+|PB|$ 的值.

23. （10 分）[选修 4−5：不等式选讲] 设正实数 a,b,c 满足 $a+2b+3c=1$.

（1）求 abc 的最大值；

（2）求 $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{4(a+b)}{b+3c}$ 的最小值.

中学生标准学术能力测试诊断性测试 2020 年 11 月测试

理科数学（一）卷答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	B	D	D	A	A	B	B	B	B	B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $\sqrt{3}$

14. $[-4,0]\cup[e,+\infty)$

15. 3

16. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17.解：

（1）$f(x)=\sin x\cdot\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\sin x\left(\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ……2 分

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ ……4 分

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$，

$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，$f(x)\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{1}{2}\right]$.

$\therefore f(x)$ 的值域是 $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{1}{2}\right]$ ……6 分

（2）$f\left(\frac{A}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，

$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，可得 $A=\frac{\pi}{3}$……8 分

设 $DC=x$，则 $AD=3x$，$BD=\sqrt{7}x$，

由余弦定理，$\cos A=\frac{(3x)^2+2^2-\left(\sqrt{7}x\right)^2}{2\times3x\times2}=\frac{1}{2}$，解得 $x=1$ 或 $x=2$……10 分

又 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times2\times4x\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}x$，

$\therefore$ ΔABC 的面积为 $2\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$……12 分

18.解：

（1）当 $n=1$ 时，$a_1=1$.

当 $n\geq2$ 时，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-2)\cdot2^{n-1}+1$①，……2 分

由 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)\cdot2^n+1$②，

②-①可得：$na_n=n\cdot2^{n-1}$，$a_n=2^{n-1}(n\geq2)$，……4 分

$a_1=2^0=1$，符合 $a_n=2^{n-1}$. 综上，$a_n=2^{n-1}$……5 分

（2）$S_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$……7 分

则 $\frac{a_n}{S_n}=\frac{2^{n-1}}{2^n-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^n-1}\right)$，当 $n\geq1$ 时，有 $2^n-1\geq2^{n-1}$ 成立，

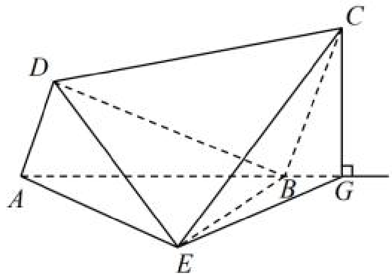
所以有 $\frac{a_n}{S_n}\leq\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}$……10 分

从而 $\frac{a_1}{S_1}+\frac{a_2}{S_2}+\cdots+\frac{a_n}{S_n}\leq\frac{n}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{n}{2}+1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\le\dfrac{n}{2}+1$，所以，$\dfrac{a_1}{S_1}+\dfrac{a_2}{S_2}+\cdots+\dfrac{a_n}{S_n}\le\dfrac{n}{2}+1$，即证……12 分

19.解：

（1）连接 DB，在 ΔABD 中，



$BD^2=AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cos\angle DAB=3$，

则 $BD=\sqrt{3}$．

所以，$AD^2+BD^2=AB^2$，即

$\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$，$AD\perp DB$……2 分

又因为平面 $ABCD\perp$ 平面 ABE，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABE=AB$，且 $EB\perp AB$，

所以 $EB\perp$ 平面 $ABCD$……3 分

因为 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EB\perp AD$……4 分

由 $AD\perp DB$，$EB\perp AD$，$DB\cap EB=B$，且 $DB,BE\subset$ 平面 DBE，

所以有 $AD\perp$ 平面 DBE……5 分

因为 $DE\subset$ 平面 DBE，所以 $AD\perp DE$，又因为 $AD//BC$，所以 $BC\perp DE$….6 分

（2）解法一：过 C 点作 $CG\perp AB$ 交 AB 的延长线于 G，连接 EG，

$\because AD//BC,\angle DAB=\dfrac{\pi}{3},\therefore\angle CBG=\dfrac{\pi}{3}$，由 $\angle CGB=90^\circ$，可得：

$CG=BC\cdot\sin60^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},BG=BC\cdot\cos60^\circ=2\times\dfrac{1}{2}=1,$

$\because BE=1$，$\angle EBG=90^\circ$，$\therefore EG=\sqrt{2}$，

$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 ABE，面 $ABCD\cap$ 面 $ABE=AB$，$CG\perp AB$，

$\therefore CG\perp$ 面 ABE，又 $\because EG\subset$ 平面 ABE，$\therefore CG\perp EG$

$\therefore\angle CGE=90^\circ,\therefore CE^2=CG^2+GE^2=5$

$\therefore CE=\sqrt{5}$，由（1）可知，$AD\perp DE$，$\therefore DE^2=AE^2-AD^2=4$ 即 $DE=2$，

由（1）可知，$AD\perp$平面DBE，所以$AD\perp BD$，$\therefore BD=\sqrt{3}$，$\because AD//BC$，

$\therefore BC\perp BD\ \therefore CD^2=BD^2+BC^2=7$，即$CD=\sqrt{7}$，

可知：$\cos\angle DCE=\dfrac{DC^2+CE^2-DE^2}{2DC\cdot CE}=\dfrac{\sqrt{7}^2+\sqrt{5}^2-2^2}{2\times\sqrt{7}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{35}}$，

$\sin\angle DCE=\sqrt{1-\dfrac{16}{35}}=\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{35}}$，

$S_{\Delta DCE}=\dfrac{1}{2}\times DC\times CE\times\sin\angle DCE=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$ ……9 分

$V_{E-BCD}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\Delta BCD}\times BE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\times\sqrt{3}}{2}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由等体积：$V_{E-BCD}=V_{B-CDE}$，所以，$\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\Delta CDE}\times h$，代入：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{19}}{2}\cdot h$，

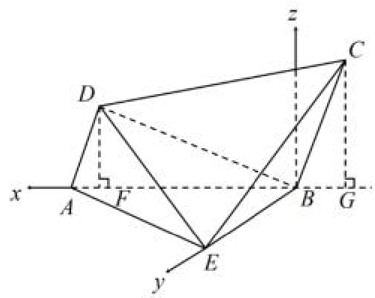
解得$h=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$，设直线$BC$与平面$DCE$所成角为$\theta$，

则 $\sin\theta=\dfrac{h}{BC}=\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}}{2}=\dfrac{\sqrt{57}}{19}$ ……12 分

解法二：以B为原点，分别以BA,BE所在直线为x,y轴，过B作垂线为z轴，建立空间直角坐标系$B-xyz$．

过点C作$CG\perp AB$交AB的延长线于点G，过点D作$DF\perp AB$交AB于点F，

$\because AD//BC,\therefore\angle CBG=\angle DAB=\dfrac{\pi}{3}$，



又$\because AD=1,BC=2$，

$\therefore DF=\sin\dfrac{\pi}{3}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{2},CG=\sin\dfrac{\pi}{3}\times 2=\sqrt{3}$，

$AF=\cos\dfrac{\pi}{3}\times 1=\dfrac{1}{2},BG=\cos\dfrac{\pi}{3}\times 2=1$，

又$\because AB=2,\therefore BF=AB-AF=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,

$\therefore C\left(-1,0,\sqrt{3}\right),D\left(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

又$\because A\left(2,0,0\right),B\left(0,0,0\right),E\left(0,1,0\right)$.

$\therefore \overrightarrow{EC}=\left(-1,-1,\sqrt{3}\right),\overrightarrow{DC}=\left(-\frac{5}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{BC}=\left(-1,0,\sqrt{3}\right)$.......8 分

设平面 DCE 的法向量为$\vec{n}=\left(x,y,z\right)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，有$\begin{cases}-x-y+\sqrt{3}z=0\\ -\frac{5}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，令$z=\sqrt{3}$，

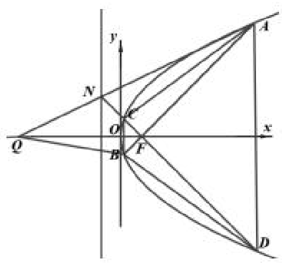
则$\vec{n}=\left(\frac{3}{5},\frac{12}{5},\sqrt{3}\right)$......10 分

设直线 BC 与平面 DCE 所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{BC}\right\rangle\right|=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}\right|=\left|\frac{-\frac{3}{5}+3}{2\times\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{144}{25}+3}}\right|=\frac{\sqrt{57}}{19}$，

即直线 BC 与平面 DCE 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{57}}{19}$.......12 分

20.解：



（1）由已知可知直线 AB 的斜率必存在，设直线 AB 的斜率为 k（$k\neq0$），抛物线$y^2=4x$的焦点$F(1,0)$，则$l_{AB}:y=k(x-1)$

与抛物线相联立，$\begin{cases}y^2=4x\\ y=k(x-1)\end{cases}\Rightarrow k^2x^2-\left(2k^2+4\right)x+k^2=0$

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}\\ x_1\cdot x_2=1\end{cases}$

$|AB| = x_1 + x_2 + 2 = 4 + \frac{4}{k^2}$ ……2 分，

同理，$|CD| = 4 + 4k^2$，则四边形 $ACBD$ 的面积为

$S = \frac{1}{2}|AB|\cdot|CD| = \frac{1}{2}\cdot 4\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\cdot 4\left(1+k^2\right) = 8\left(2+k^2+\frac{1}{k^2}\right) \geq 8(2+2) = 32$，

当且仅当 $k = \pm 1$ 时，四边形 $ACBD$ 的面积的最小值为 32……4 分

（2）设点 $A(t_1^2, 2t_1)(t_1 > 0), B(t_2^2, 2t_2)(t_2 < 0), C(t_3^2, 2t_3)(t_3 > 0), D(t_4^2, 2t_4)(t_4 < 0)$，

则 $k_{AB} = \frac{2}{t_1 + t_2}, k_{CD} = \frac{2}{t_3 + t_4}. k_{AF} = \frac{2t_1}{t_1^2 - 1}$，考虑到点 $A, F(1,0), B$ 共线，

则 $k_{AB} = k_{AF} \Rightarrow \frac{2}{t_1 + t_2} = \frac{2t_1}{t_1^2 - 1}$，从而 $t_1 t_2 = -1$ ……6 分

同理 $t_3 t_4 = -1$.

由于 $AB \perp CD$，从而 $k_{AB}\cdot k_{CD} = \frac{2}{t_1+t_2}\cdot\frac{2}{t_3+t_4} = -1$，故 $(t_1+t_2)(t_3+t_4) = -4$.

由于直线 $CD: y = \frac{2}{t_3+t_4}(x-1)$，则点 $N\left(-1, \frac{-4}{t_3+t_4}\right)$，由于 $\frac{-4}{t_3+t_4} = t_1 + t_2$.

故 $N(-1, t_1 + t_2)$……8 分

由于 $k_{AN} = \frac{2t_1 - (t_1+t_2)}{t_1^2+1} = \frac{t_1 - t_2}{t_1^2+1} = \frac{t_1 + \frac{1}{t_1}}{t_1^2+1} = \frac{1}{t_1}$，从而直线 AN 的方程为

$y = \frac{1}{t_1}(x - t_1^2) + 2t_1$，即 $y = \frac{1}{t_1}x + t_1$，从而点 Q 的横坐标为 $x_Q = -t_1^2$.

由此 $|FQ| = 1 + t_1^2$.

又 $|y_A - y_B| = |2t_1 - 2t_2| = \left|2t_1 + \frac{2}{t_1}\right| = \frac{2(t_1^2+1)}{t_1}$，

从而 $S_{\Delta AQB} = \frac{1}{2}|FQ|\cdot|y_A - y_B| = \frac{1+t_1^2}{2}\times\frac{2(t_1^2+1)}{t_1} = \frac{(t_1^2+1)^2}{t_1}(t_1 > 0)$……10 分

由于 $S_{\Delta AQB}=\frac{\left(t_1^2+1\right)^2}{t_1}=\frac{t_1^{\ 4}+2t_1^{\ 2}+1}{t_1}=t_1^{\ 3}+2t_1+\frac{1}{t_1}$，令 $f\left(t_1\right)=t_1^{\ 3}+2t_1+\frac{1}{t_1}$，

则 $f^{'}\left(t_1\right)=3t_1^{\ 2}+2-\frac{1}{t_1^{\ 2}}=\frac{3t_1^{\ 4}+2t_1^{\ 2}-1}{t_1^{\ 2}}=\frac{\left(3t_1^{\ 2}-1\right)\left(t_1^{\ 2}+1\right)}{t_1^{\ 2}}$，

可知 $f\left(t_1\right)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减，

所以，当且仅当 $t_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，ΔAQB 面积的最小值为 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ ......12 分

21.解：

（1）设 $h(x)=\frac{f(x-1)}{x-1}+\ln x-2x+1=e^{x-1}+\ln x-2x+1(x>1)$

$\therefore h^{'}(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x}-2$，$\therefore h^{''}(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x^2}$

$\because x>1\ \therefore e^{x-1}>1, 0<\frac{1}{x^2}<1\ \therefore h^{''}(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x^2}>0$......2 分

$\therefore h^{'}(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，又 $h^{'}(1)=0$

$\therefore x>1$ 时，$h^{'}(x)>h^{'}(1)=0$......4 分

$h(x)=e^{x-1}+\ln x-2x+1$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(1)=0$

$\therefore x>1$ 时，$h(x)>h(1)=0$

故当 $x>1$ 时，$\frac{f(x-1)}{x-1}>-\ln x+2x-1$，

$\therefore f(x-1)-(1-x)\ln x>2x^2-3x+1$...6 分

（2）$\because g(x)=xe^x-\frac{1}{2}a(x+1)^2$

$\therefore g^{'}(x)=(x+1)e^x-a(x+1)\ =(x+1)\left(e^x-a\right)$

当 $a=0$ 时，易知函数 $g(x)$ 只有一个零点，不符合题意:......7 分

当 $a<0$ 时，在 $(-\infty,-1)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

在 $(-1,+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；又 $g(-1)=-\frac{1}{e}<0$，且 $g(1)=e-2a>0$

不妨取 $b<-4$ 且 $b<\ln(-a)$ 时，$g(b)>be^{\ln(-a)}-\frac{1}{2}a(b+1)^2=-a\left(\frac{1}{2}b^2+2b+\frac{1}{2}\right)>0$

[或者考虑：当 $x\to-\infty$，$g(x)\to+\infty$]，所以函数 $g(x)$ 有两个零点，

$\therefore a<0$ 符合题意……9 分

当 $a>0$ 时，由 $g'(x)=(x+1)(e^x-a)=0$ 得 $x=-1$ 或 $x=\ln a$

（i）当 $\ln a=-1$ 即 $a=\frac{1}{e}$ 时，在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$g'(x)\geq 0$ 成立，

故 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $g(x)$ 至多有一个零点，不符合题意……10 分

（ii）当 $\ln a<-1$ 即 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

在 $(\ln a,-1)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；又 $g(-1)=-\frac{1}{e}<0$，

且 $g(\ln a)=a\ln a-\frac{1}{2}a(\ln a+1)^2=-\frac{1}{2}a(\ln^2 a+1)<0$，

所以函数 $g(x)$ 至多有一个零点 $g(x)$，不符合题意……11 分

（iii）当 $\ln a>-1$ 即 $a>\frac{1}{e}$ 时，在 $(-\infty,-1)$ 和 $(\ln a,+\infty)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

在 $(-1,\ln a)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减

又 $g(-1)=-\frac{1}{e}<0$，所以函数 $g(x)$ 至多有一个零点，不符合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0)$……12 分

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，

一题计分.

22. [选修 4—4：极坐标与参数方程]（10 分）解：

（1）$x=\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{2}=0, y=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{2}=\sqrt{2}$，

$\therefore P$ 的直角坐标为 $P\left(0,\sqrt{2}\right)$......2 分

由 $\begin{cases}x=3\cos\varphi\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$，得 $\cos\varphi=\dfrac{x}{3},\sin\varphi=\dfrac{y}{2}$.

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ......4 分

（2）将 $\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ 代入 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\Rightarrow 4\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+9\left(\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=36$，

化简得 $13t^2+36t-36=0$ ......6 分

设 A，B 对应的参数分别为 t_1,t_2，

则 $t_1+t_2=-\dfrac{36}{13},t_1\cdot t_2=-\dfrac{36}{13}$ ......8 分

$\because P$ 点在直线 l 上，

$\therefore |PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\left(\dfrac{36}{13}\right)^2+4\times\dfrac{36}{13}}=\dfrac{12\sqrt{22}}{13}$

......10 分

23. [选修 4—5：不等式选讲]（10 分）解：

（1）$\because a,b,c>0$，$\therefore a+2b+3c\geq 3\sqrt[3]{6abc}\Rightarrow 1\geq 3\sqrt[3]{6abc}$ ......2 分

$\therefore abc\leq\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{162}$ ......4 分

当且仅当 $a=2b=3c=\dfrac{1}{3}$，即 $a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{1}{6},c=\dfrac{1}{9}$ 时，abc 取到最大值为 $\dfrac{1}{162}$ ......5 分

（2）$\because a+2b+3c=1,\therefore b+3c=1-a-b>0$

$$\therefore \frac{1}{a+b}+\frac{4(a+b)}{b+3c}=\frac{1}{a+b}+\frac{4(a+b)}{1-a-b}=\frac{1}{a+b}+\frac{-4(1-a-b)+4}{1-a-b}=\frac{1}{a+b}+\frac{4}{1-a-b}-4$$

……7 分

$$=[(a+b)+(1-a-b)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{4}{1-a-b}\right)-4=\frac{1-a-b}{a+b}+\frac{4(a+b)}{1-a-b}+1\geq 5$$ ……9 分

当且仅当$1-a-b=2(a+b)$，即$a+b=\frac{1}{3}$时，

$\frac{1}{a+b}+\frac{4(a+b)}{b+3c}$取得最小值为 5……10 分.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。